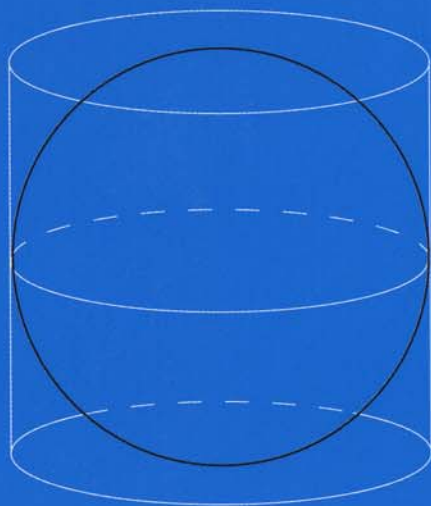


COLLECTION ENSEIGNEMENT SUP // // // Mathématiques

L3M1

Calcul intégral

Jacques Faraut



CALCUL INTÉGRAL

CALCUL INTÉGRAL

Jacques Faraut
Collection dirigée par Daniel Guin



17, avenue du Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

ISBN : 2-86883-912-6

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

© **2006, EDP Sciences**, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf, 91944 Les Ulis Cedex A

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	v
I Mesure et intégrale	1
I.1 Mesure	1
I.2 Intégrale des fonctions positives	7
I.3 Fonctions intégrables	13
II Mesure de Lebesgue	23
II.1 Un théorème de prolongement	23
II.2 Mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}	29
II.3 Intégrales au sens de Riemann et au sens de Lebesgue	35
III Espaces L^p	41
III.1 Inégalités de Hölder et de Minkowski, espaces \mathcal{L}^p	41
III.2 Espaces L^p , théorème de Riesz-Fischer	44
III.3 L'espace de Hilbert L^2	49
IV Intégration sur un espace produit	55
IV.1 Produit de deux espaces mesurés	55
IV.2 Intégration sur un espace produit	57
V Intégration sur \mathbb{R}^n	65
V.1 Mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n	65
V.2 Mesure superficielle sur la sphère	67
V.3 La formule de changement de variables	70
VI Mesures de Lebesgue-Stieltjes	81
VI.1 Intégrale de Riemann-Stieltjes	81

VI.2	Mesures de Lebesgue-Stieltjes	83
VI.3	Théorème de Riesz	84
VI.4	Convergence des mesures	88
VII	Fonctions définies par des intégrales	93
VII.1	Continuité, dérivabilité, analyticité	93
VII.2	Intégrales semi-convergentes	97
VII.3	Intégrales de Laplace	102
VII.4	Intégrales de Fourier	105
VIII	Convolution	113
VIII.1	Convolution et invariance par translation. Exemples	113
VIII.2	Convolution et espaces $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$	116
VIII.3	Approximation de l'identité et régularisation	121
VIII.4	Convolution des mesures bornées	125
IX	Transformation de Fourier	129
IX.1	Transformées de Fourier des fonctions intégrables	130
IX.2	Transformées de Fourier des fonctions de carré intégrable . . .	136
IX.3	Transformées de Fourier des mesures bornées	138
X	Séries de Fourier	147
X.1	Coefficients de Fourier	148
X.2	Convergence en moyenne quadratique	149
X.3	Convergence uniforme	152
X.4	Convergence ponctuelle	154
X.5	Convergence au sens de Cesaro	156
XI	Applications et compléments	163
XI.1	Polynômes orthogonaux	163
XI.2	Équation de la chaleur	173
XI.3	Problème de l'isopérimètre	178
XI.4	Phénomène de Gibbs	180
XI.5	La série de Fourier d'une fonction continue converge-t-elle? . .	182
XI.6	Jeu de pile ou face et mesure de Lebesgue	184
XI.7	Théorème de la limite centrale	188
	Bibliographie	193
	Index	195

AVANT-PROPOS

La théorie de l'intégration s'est développée à partir du calcul des aires et des volumes. L'aire d'un rectangle est égale au produit $a \cdot b$ des longueurs des côtés, et, l'aire d'une réunion de deux parties disjointes étant égale à la somme des aires, l'aire d'un triangle est égale à la demi-somme du produit de la longueur d'un côté par la longueur de la hauteur correspondante. Ensuite l'aire d'un polygone s'obtient en le décomposant en une réunion disjointe de triangles. Pour mesurer l'aire d'un disque de rayon r on le considère comme une réunion d'une suite infinie croissante de polygones, et c'est ainsi qu'on montre que son aire est égale à πr^2 (r étant le rayon, et le nombre π étant défini comme le demi-périmètre d'un cercle de rayon 1). Une question se pose alors : peut-on mesurer l'aire d'une partie quelconque du plan ? Nous devons préciser la question : peut-on attribuer à chaque partie A du plan un nombre $\mu(A)$, l'aire de A , nombre réel positif ou nul, ou $+\infty$? Cette application μ doit posséder les propriétés qu'on attend de la mesure des aires :

(1) Si A est un rectangle dont les longueurs des côtés sont égales à a et b , alors $\mu(A) = a \cdot b$.

(2) Si $\{A_n\}$ est une suite de parties disjointes deux à deux, alors

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(3) Si A et B sont deux parties « égales », c'est-à-dire s'il existe une isométrie qui transforme A en B , alors $\mu(A) = \mu(B)$.

La réponse à cette question est négative, comme cela a été démontré par Vitali. Ceci conduit à modifier le problème posé. On n'exige plus de pouvoir mesurer l'aire de toute partie du plan, mais seulement celle d'une famille \mathfrak{M} contenant les rectangles et stable par réunion dénombrable. Les ensembles de la famille \mathfrak{M} sont appelés ensembles mesurables. Ainsi posé le problème admet une solution. Avant d'étudier la mesure des aires, nous considérerons la mesure de Lebesgue qui est

la solution d'un problème analogue posé en dimension un. L'étape suivante est la construction de l'intégrale par approximation à partir de l'intégrale de fonctions étagées. Dans le cas de l'intégrale de Riemann, les fonctions étagées considérées sont les fonctions en escalier. En revanche, dans le cas de l'intégrale de Lebesgue, ce sont des fonctions étagées d'un type plus général : les fonctions mesurables étagées. Cette généralisation est essentielle car elle conduit aux énoncés fondamentaux de la théorie de l'intégration comme le théorème de convergence dominée de Lebesgue et celui de Riesz-Fischer, qui n'ont pas d'analogue dans le cas de l'intégrale de Riemann.

La présentation que nous avons choisie des éléments de base de la théorie de la mesure et de l'intégrale est proche de celle de l'excellent ouvrage de W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*. Le chapitre I est une présentation ensembliste aboutissant aux théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée de Lebesgue. C'est au chapitre II qu'il est montré qu'il existe une mesure sur la droite réelle pour laquelle la mesure d'un intervalle est égale à sa longueur. Les espaces fonctionnels L^p sont étudiés au chapitre III. Le théorème de Riesz-Fischer dit que ce sont des espaces normés complets, et ce résultat est fondamental pour les applications à l'analyse fonctionnelle. Le théorème de Fubini que nous voyons au chapitre IV permet le calcul des intégrales multiples considérées au chapitre V.

Dans la présentation fonctionnelle de la théorie de l'intégration, la définition de base est la mesure de Radon qui est une forme linéaire positive sur l'espace des fonctions continues à support compact. Le théorème de Riesz permet de relier les deux points de vue : ensembliste et fonctionnel. Nous présentons cette relation au chapitre VI dans le cas particulier de la droite réelle.

Nous avons particulièrement développé le chapitre VII sur les fonctions définies par des intégrales, car nous estimons que son contenu est important par ses applications à l'analyse. Nous étudions en particulier le comportement asymptotique d'intégrales par la méthode de Laplace et par celle de la phase stationnaire dans le cas des intégrales simples.

Les trois chapitres suivants, VIII, IX et X, contiennent les éléments de base de l'analyse harmonique en une variable : convolution sur le groupe additif des nombres réels et analyse de Fourier.

Le calcul intégral est un outil essentiel de l'analyse mathématique et du calcul des probabilités. Nous l'avons illustré en choisissant sept applications qui sont présentées dans le dernier chapitre. L'équation de la chaleur est importante historiquement. Ce sont en effet les travaux de Fourier sur cette équation qui sont à l'origine de l'analyse qui porte son nom. Les polynômes orthogonaux interviennent dans de nombreuses questions de physique mathématique, et leur étude fait appel à des domaines variés des mathématiques : algèbre linéaire, analyse complexe,

théorie spectrale, analyse combinatoire. La solution du problème de l'isopérimètre est une belle application de l'analyse de Fourier à la géométrie.

Nous ne parlons pas dans ce livre des relations qui existent entre le calcul intégral et les notions de base du calcul des probabilités. Nous les avons cependant illustrées dans deux des compléments du chapitre XI : le jeu de pile ou face et la mesure de Lebesgue, et le théorème de la limite centrale.

Chacun des chapitres est suivi d'exercices. Certains d'entre eux constituent des compléments présentés sous forme de problèmes. La bibliographie est loin d'être exhaustive. Nous avons seulement indiqué quelques ouvrages classiques de la théorie de la mesure et de l'intégration. En plusieurs occasions, nous utilisons des résultats d'analyse fonctionnelle pour lesquels nous faisons référence au livre de C. Albert, *Topologie*, et aussi à celui de V. Avanişian, *Initiation à l'analyse fonctionnelle*. Les termes nouveaux sont définis dans le texte à leur première occurrence et sont alors écrits en caractères italiques. L'index placé à la fin du livre permet de retrouver cette première occurrence.

Ce livre s'adresse aux étudiants de licence de mathématiques. Il a été rédigé à partir des notes d'un cours donné à la faculté des sciences de Tunis, et de celles d'un cours donné à l'université Louis Pasteur de Strasbourg. Je tiens à remercier Daniel Guin de m'avoir encouragé à tirer de ces notes la matière de ce livre.

I

MESURE ET INTÉGRALE

L'un des principaux objectifs de ce cours de calcul intégral est la construction de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue. Nous commençons par dire ce qu'est une mesure. C'est une fonction d'ensemble. À une partie A d'un ensemble X on associe un nombre $\mu(A)$, la mesure de A . Immédiatement, une difficulté se présente car, en général, $\mu(A)$ n'est définie que pour certaines parties de X , appelées ensembles mesurables. On définit ensuite l'intégrale d'une fonction. Ce chapitre contient deux théorèmes fondamentaux du calcul intégral : le théorème de convergence monotone et le théorème de convergence dominée.

I.1. Mesure

Si X est un ensemble, une famille \mathfrak{A} de parties de X est appelée *algèbre de Boole* si

- \emptyset et X appartiennent à \mathfrak{A} ;
- si A appartient à \mathfrak{A} , alors son complémentaire A^c aussi ;
- si A et B appartiennent à \mathfrak{A} , alors leur réunion $A \cup B$ et leur intersection $A \cap B$ aussi.

Un ensemble \mathfrak{M} de parties de X est appelé *tribu* (ou σ -algèbre de Boole) si \mathfrak{M} est une algèbre de Boole telle que, si $\{A_n\}$ est une suite d'éléments de \mathfrak{M} , alors leur réunion $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ appartient également à \mathfrak{M} . Le couple (X, \mathfrak{M}) d'un ensemble X et d'une tribu \mathfrak{M} de parties de X est appelé *espace mesurable* et les parties appartenant à \mathfrak{M} sont appelés *ensembles mesurables*.

De la définition d'une tribu on déduit immédiatement les propriétés suivantes.
Soit (X, \mathfrak{M}) un espace mesurable.

- Si A et B sont deux ensembles mesurables, alors leur différence $A \setminus B = A \cap (B^c)$ est aussi mesurable.

- Si $\{A_n\}$ est une suite d'ensembles mesurables, leur intersection est aussi mesurable car

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c.$$

Sur un ensemble X non vide, il existe toujours au moins deux tribus : la tribu constituée des deux parties \emptyset et X , et la tribu $\mathfrak{P}(X)$ de toutes les parties de X . On dit qu'une tribu \mathfrak{M} est plus petite qu'une tribu \mathfrak{M}' si tout élément de \mathfrak{M} appartient à \mathfrak{M}' . La tribu $\{\emptyset, X\}$ est la plus petite des tribus sur X , et $\mathfrak{P}(X)$ la plus grande. Une intersection quelconque de tribus est une tribu. Si \mathcal{D} est un ensemble de parties de X , il existe une plus petite tribu contenant \mathcal{D} , à savoir l'intersection \mathfrak{M} des tribus contenant \mathcal{D} . (Il en existe au moins une : $\mathfrak{P}(X)$.) On dit que \mathfrak{M} est la tribu engendrée par \mathcal{D} .

Si X est un espace topologique, on notera $\mathfrak{B}(X)$ la *tribu borélienne* de X , c'est-à-dire la tribu engendrée par les ouverts de X . Ses éléments sont appelés *ensembles boréliens*. Notons que tout ouvert, tout fermé est un ensemble borélien. Si $X = \mathbb{R}$, la tribu borélienne $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalles, car tout ouvert de \mathbb{R} est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts. Soit en effet Ω un ouvert de \mathbb{R} et considérons les intervalles ouverts $I =]a, b[$ contenus dans Ω pour lesquels les extrémités a et b sont des nombres rationnels. Ces intervalles constituent une famille dénombrable et leur réunion est égale à Ω . Si $X = \mathbb{R}^2$, la tribu borélienne $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$ est engendrée par les rectangles car tout ouvert de \mathbb{R}^2 est une réunion dénombrable de rectangles ouverts. En effet tout ouvert Ω de \mathbb{R}^2 est la réunion des rectangles $R =]a, b[\times]c, d[$ contenus dans Ω pour lesquels les coordonnées a, b, c, d des sommets sont des nombres rationnels, et ces rectangles constituent une famille dénombrable. Plus généralement la tribu borélienne de \mathbb{R}^n est engendrée par les pavés. Rappelons qu'un *pavé* est un produit d'intervalles.

Si (X, \mathfrak{M}) est un espace mesurable, une fonction f définie sur X à valeurs dans $[-\infty, \infty]$ est dite *mesurable* si l'image réciproque par f de tout intervalle de $[-\infty, \infty]$ est mesurable. Pour que f soit mesurable il faut et suffit que, pour tout nombre réel α , l'ensemble

$$f^{-1}(] \alpha, \infty]) = \{x \in X \mid f(x) > \alpha\} \tag{*}$$

soit mesurable. En effet, si f possède cette propriété, l'ensemble

$$f^{-1}(] \alpha, \infty]) = \{x \mid f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \mid f(x) > \alpha - \frac{1}{n} \right\}$$

est aussi mesurable. Par passage au complémentaire on montre que $f^{-1}([-\infty, \alpha])$ et $f^{-1}([-\infty, \alpha[)$ sont mesurables et par intersection que l'image réciproque par f de tout intervalle de $[-\infty, \infty]$ est mesurable. Notons que dans (*) on peut remplacer $]\alpha, \infty]$ par $[\alpha, \infty]$, ou $[-\infty, \alpha[$, ou $[-\infty, \alpha]$.

Si f et g sont deux fonctions mesurables sur X à valeurs réelles, et si Φ est une fonction continue sur \mathbb{R}^2 à valeurs réelles, alors la fonction h définie par

$$h(x) = \Phi(f(x), g(x))$$

est mesurable. En effet, pour tout nombre réel α , l'ensemble

$$\Omega_\alpha = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \Phi(u, v) > \alpha\}$$

est un ouvert, et est donc égal à une réunion dénombrable de rectangles ouverts

$$\Omega_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n, \quad R_n =]a_n, b_n[\times]c_n, d_n[.$$

Les ensembles

$$\{x \mid (f(x), g(x)) \in R_n\} = \{x \mid a_n < f(x) < b_n\} \cap \{x \mid c_n < g(x) < d_n\}$$

sont mesurables, et de même l'ensemble

$$\{x \mid h(x) > \alpha\} = \{x \mid (f(x), g(x)) \in \Omega_\alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid (f(x), g(x)) \in R_n\}$$

est mesurable. On en déduit que la somme et le produit de deux fonctions mesurables sont mesurables.

Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $[-\infty, \infty]$. Alors la fonction $g = \sup_{n \geq 0} f_n$ est mesurable. En effet

$$\{x \mid g(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x \mid f_n(x) > \alpha\}.$$

De même la fonction $g = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ est mesurable. En effet

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \inf_{m \geq 0} \left(\sup_{n \geq m} f_n(x) \right).$$

Si pour tout x la suite $\{f_n(x)\}$ a une limite $f(x)$, alors la fonction f est mesurable.

Une fonction f à valeurs complexes est dite mesurable si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont mesurables.

Si X est un espace topologique et si $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$ est la tribu borélienne de X , une fonction mesurable est appelée *fonction borélienne*. Notons que les fonctions continues sont boréliennes.

Une fonction est dite *étagée* si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Une fonction mesurable étagée f sur un espace mesurable (X, \mathfrak{M}) est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables,

$$f = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i} \quad (A_i \in \mathfrak{M}).$$

Rappelons que la *fonction caractéristique* χ_A d'une partie $A \subset X$ est la fonction qui est égale à 1 sur A et à 0 sur le complémentaire de A .

Proposition I.1.1. *Soit (X, \mathfrak{M}) un espace mesurable et soit f une fonction mesurable à valeurs dans $[0, \infty]$. Il existe une suite croissante $\{u_n\}$ de fonctions mesurables étagées à valeurs dans $[0, \infty[$ telle que, pour tout $x \in X$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = f(x).$$

Démonstration. Pour tout entier $n > 0$, et pour $1 \leq i \leq n2^n$, posons

$$A_{n,i} = \left\{ x \mid \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\},$$

$$B_n = \{x \mid f(x) \geq n\}.$$

Ces ensembles sont mesurables. Soit u_n la fonction mesurable étagée définie par

$$u_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{A_{n,i}} + n \chi_{B_n}.$$

Montrons que $u_n(x) \leq u_{n+1}(x)$. Pour cela on remarque que, quand on passe de n à $n+1$, chaque ensemble $A_{n,i}$ est partagé en deux,

$$A_{n,i} = A_{n+1,2i-1} \cup A_{n+1,2i}.$$

Si $x \in A_{n,i}$, $u_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$, et

$$\text{si } x \in A_{n+1,2i-1}, \quad u_{n+1}(x) = \frac{2i-2}{2^{n+1}} = \frac{i-1}{2^n},$$

$$\text{si } x \in A_{n+1,2i}, \quad u_{n+1}(x) = \frac{2i-1}{2^{n+1}} > \frac{i-1}{2^n}.$$

D'autre part, B_n est la réunion de B_{n+1} et des ensembles $A_{n+1,i}$, i variant de $n2^{n+1} + 1$ à $(n + 1)2^{n+1}$. Si $x \in B_n$, $u_n(x) = n$, et

$$\begin{aligned} &\text{si } x \in B_{n+1}, \quad u_{n+1}(x) = n + 1 > n, \\ &\text{si } x \in A_{n+1,i}, \quad u_{n+1}(x) = \frac{i - 1}{2^{n+1}} \geq n \quad (n2^{n+1} + 1 \leq i \leq (n + 1)2^{n+1}). \end{aligned}$$

Montrons maintenant qu'en tout point x la suite $\{u_n(x)\}$ converge vers $f(x)$. En effet, si $f(x) < \infty$, pour $n > f(x)$,

$$f(x) - u_n(x) \leq \frac{1}{2^n},$$

et, si $f(x) = \infty$, $u_n(x) = n$. □

Remarquons que si la fonction f est bornée ($f(x) \leq M < \infty$), la suite $\{u_n\}$ converge vers f uniformément.

Une *mesure* sur un espace mesurable (X, \mathfrak{M}) est une application μ de \mathfrak{M} dans $[0, \infty]$ vérifiant

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- si A et B sont deux ensembles mesurables disjoints,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B),$$

- si $\{A_n\}$ est une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

La somme du second membre peut être égale à $+\infty$, si l'un des nombres $\mu(A_n)$ est égale à $+\infty$, ou si la série est divergente.

Le nombre $\mu(A)$ est appelé la mesure de l'ensemble mesurable A . La mesure $\mu(X)$ de X est appelée la *masse totale* de la mesure μ . Un *espace mesuré* est un triplet (X, \mathfrak{M}, μ) où μ est une mesure définie sur l'espace mesurable (X, \mathfrak{M}) .

Soit X un ensemble et $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}(X)$ la tribu de toutes les parties de X . Pour $x_0 \in X$, la *mesure de Dirac* δ_{x_0} est définie par

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in E \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La *mesure de comptage* μ est définie par $\mu(E) = \#(E)$, où $\#(E)$ désigne le nombre d'éléments de E .

Soit $\{x_n\}$ une suite de points de X et $\{\alpha_n\}$ une suite de nombres ≥ 0 . Posons

$$\mu(E) = \sum_{\{n|x_n \in E\}} \alpha_n.$$

Ce nombre est bien défini,

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \chi_E(x_n),$$

et μ est une mesure sur (X, \mathfrak{M}) . Pour le vérifier considérons une suite $\{A_k\}$ d'ensembles deux à deux disjoints, et soit E leur réunion. Alors

$$\chi_E(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k}(x),$$

et

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k}(x) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \chi_{A_k}(x) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait suivant : si $\{u_{pq}\}$ est une suite double de nombres ≥ 0 , alors

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{q=1}^{\infty} u_{pq} \right) = \sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} u_{pq} \right) (\leq +\infty).$$

Cette égalité signifie que soit les deux membres sont finis et égaux, soit ils sont tous les deux infinis. Une telle mesure est appelée *mesure discrète*.

Si X est un espace topologique et \mathfrak{B} est la tribu borélienne de X , une mesure sur l'espace mesurable (X, \mathfrak{B}) est appelée *mesure borélienne*.

Soient $X = \mathbb{R}$ et \mathfrak{B} la tribu borélienne de \mathbb{R} . Nous montrerons au chapitre II qu'il existe une unique mesure λ sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ telle que, si I est un intervalle d'extrémités a et b ,

$$\lambda(I) = b - a.$$

Cette mesure s'appelle la *mesure de Lebesgue* de \mathbb{R} . Nous verrons d'autres exemples importants de mesures au chapitre V.

I.2. Intégrale des fonctions positives

Nous aurons à considérer des fonctions prenant la valeur $+\infty$ et des ensembles de mesure infinie. Nous adoptons les conventions suivantes :

$$\begin{aligned} a + \infty &= \infty + a = \infty, \text{ si } a \in [0, \infty], \\ a \cdot \infty &= \infty \cdot a = \infty, \text{ si } a \in]0, \infty], \\ 0 \cdot \infty &= \infty \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Fixons un espace mesuré (X, \mathfrak{M}, μ) . Nous définissons d'abord l'intégrale d'une fonction mesurable étagée, puis cette définition sera étendue au cas d'une fonction mesurable positive par passage à la borne supérieure.

Soit f une fonction mesurable étagée à valeurs dans $[0, \infty]$, soient $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ les valeurs prises par f et

$$E_j = \{x \in X \mid f(x) = \alpha_j\} \quad (j = 1, \dots, N).$$

L'intégrale de f est définie par

$$\int_X f d\mu = \sum_{j=1}^N \alpha_j \mu(E_j).$$

Si f est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables,

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i},$$

alors

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

Il existe en effet des ensembles mesurables disjoints C_k tels que tout ensemble A_i soit une réunion de certains des ensembles C_k ,

$$\chi_{A_i} = \sum_{k=1}^p \varepsilon_{ik} \chi_{C_k},$$

où les nombres ε_{ik} sont égaux à 0 ou 1. Par suite

$$\mu(A_i) = \sum_{k=1}^p \varepsilon_{ik} \mu(C_k).$$

La fonction f s'écrit

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{k=1}^p \varepsilon_{ik} \chi_{C_k} \right) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_{ik} \right) \chi_{C_k}.$$

Si x appartient à l'ensemble C_k , alors

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_{ik}.$$

L'ensemble E_j est donc égal à la réunion des ensembles C_k pour lesquels $\sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_{ik} = \alpha_j$. Par suite l'intégrale de f s'écrit

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu &= \sum_{j=1}^N \alpha_j \mu(E_j) \\ &= \sum_{j=1}^N \alpha_j \left(\sum_{\{k \mid \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_{ik} = \alpha_j\}} \mu(C_k) \right) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_{ik} \right) \mu(C_k) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{k=1}^p \varepsilon_{ik} \mu(C_k) \right) = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i). \end{aligned}$$

Soit maintenant f une fonction mesurable à valeurs dans $[0, \infty]$; l'intégrale de f est définie par

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X u d\mu \mid u \in \mathcal{E}(X, \mathfrak{M}), 0 \leq u \leq f \right\},$$

où $\mathcal{E}(X, \mathfrak{M})$ désigne l'espace des fonctions mesurables étagées définies sur X . C'est un nombre réel positif ou nul, ou $+\infty$.

On vérifie facilement les propriétés suivantes de l'intégrale. Si f et g sont deux fonctions mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$, et si $f \leq g$, alors

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

Si f est une fonction mesurable à valeurs dans $[0, \infty]$ et si λ est un nombre réel ≥ 0 ,

$$\int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu.$$

INDEX

A

Abel (théorème d'), 98
algèbre de Boole, 1
analytique (fonction), 95
approximation de l'identité, 121

B

base hilbertienne, 50
Beppo-Levi (théorème de), 9
Bessel (fonction de), 109
 (inégalité), 50
bêta (fonction), 75
Bochner (théorème de), 141
borélien (ensemble), 2
borélienne (fonction), 4
 (mesure), 6
 (tribu), 2
borné (essentiellement), 44
bornée (mesure), 89
borne supérieure essentielle, 44

C

Cantor (ensemble de), 37
 (fonction de), 91
caractéristique (fonction), 4
Cesaro (convergence au sens de), 156
Christoffel-Darboux (formule de), 169
complet (espace mesuré), 18
complétée (tribu), 18
concentrée (mesure), 49
convergence dominée (théorème de), 17
convergence en moyenne quadratique, 49
convergence étroite, 89
convergence monotone (théorème de), 9
convergence vague, 88
convolution (produit de), 114

D

différence symétrique, 25
Dirac (mesure de), 5
Dirichlet (intégrale de), 78, 133
 (noyau de), 154
 (théorème de), 155
dispersion (d'une mesure de probabilité), 189

E

écart, 25
Egoroff (théorème d'), 39
escalier (fonction en), 30
étagée (fonction), 4

F

Fatou (lemme de), 11
Fejer (noyau de), 157
 (théorème de), 157
Fourier (coefficient de), 148
 (intégrale de), 99, 105
 (série de), 148
 (transformation de), 130, 138
Fourier-Plancherel
 (transformation de), 136
Fresnel (intégrale de), 100
Fubini (théorème de), 59
Fubini-Tonelli (théorème de), 61

G

gamma (fonction), 69
Gauss (intégrale de), 20, 69
 (noyau de), 176, 177
Gauss-Jacobi (formule de quadrature de), 170

H

Hardy (inégalité de), 52
 Hermite (polynôme d'), 168
 Hölder (inégalité de), 42
 holomorphe (fonction), 95

I

intégrable (ensemble), 26
 (fonction), 13
 (au sens de Lebesgue), 14
 (au sens de Riemann), 35
 (au sens de Riemann-Stieltjes), 82
 (au sens de Lebesgue-Stieltjes), 84
 intégrale, 13

J

Jackson (intégrale de), 91

L

Laguerre (polynôme de), 167
 Laplace (intégrale de), 102
 Lebesgue (constante de), 183
 (mesure de), 6, 65
 Legendre (polynôme de), 165
 Lévy (théorème de), 139
 Lusin (théorème de), 39

M

masse totale, 5
 Minkowski (inégalité de), 42
 mesurable (ensemble), 1, 33
 (espace), 1
 (fonction), 2
 (rectangle), 55
 mesuré (espace), 5
 mesure, 5
 de comptage, 5
 discrète, 6
 extérieure, 25
 moyenne (d'une mesure de probabilité), 188

N

négligeable, 15
 noyau (d'une transformation intégrale), 114

P

Parseval (formule de), 150
 pavé, 2
 périodique (fonction), 147
 phase stationnaire
 (théorème de la), 107
 Plancherel (formule de), 136
 (théorème de), 137
 Poisson (formule de), 160
 polynôme trigonométrique, 147
 presque partout, 15

R

régularisée (fonction), 124
 Rademacher (fonction de), 53
 Riemann (intégrale de), 35
 Riemann-Lebesgue (lemme de), 106
 Riemann-Stieltjes (intégrale de), 81
 Riesz (théorème de), 85
 Riesz-Fischer (théorème de), 46

S

Schwartz (espace de), 135
 Schwarz (inégalité de), 44
 semi-intégrable, 97
 Stirling (formule de), 105
 support, 48

T

tribu, 1
 type positif (fonction de), 140

V

Vitali (critère de), 53

W

Walsh (fonction de), 53
 Wallis (intégrale de), 20