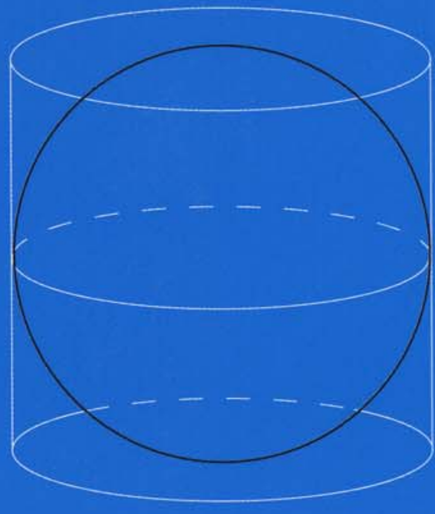
COLLECTION ENSEIGNEMENT SUP //// Mathématiques

L3M1

Calcul intégral

Jacques Faraut



EDP SCIENCES

CALCUL INTÉGRAL

CALCUL INTÉGRAL

Jacques Faraut

Collection dirigée par Daniel Guin

EDP SCIENCES

17, avenue du Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

ISBN : 2-86883-912-6

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

La théorie de l'intégration s'est développée à partir du calcul des aires et des volumes. L'aire d'un rectangle est égale au produit $a \cdot b$ des longueurs des côtés, et, l'aire d'une réunion de deux parties disjointes étant égale à la somme des aires, l'aire d'un triangle est égale à la demi-somme du produit de la longueur d'un côté par la longueur de la hauteur correspondante. Ensuite l'aire d'un polygone s'obtient en le décomposant en une réunion disjointe de triangles. Pour mesurer l'aire d'un disque de rayon r on le considère comme une réunion d'une suite infinie croissante de polygones, et c'est ainsi qu'on montre que son aire est égale à πr^2 (r étant le rayon, et le nombre π étant défini comme le demi-périmètre d'un cercle de rayon 1). Une question se pose alors : peut-on mesurer l'aire d'une partie quelconque du plan ? Nous devons préciser la question : peut-on attribuer à chaque partie A du plan un nombre $\mu(A)$, l'aire de A, nombre réel positif ou nul, ou $+\infty$? Cette application μ doit posséder les propriétés qu'on attend de la mesure des aires :

(1) Si A est un rectangle dont les longueurs des côtés sont égales à a et b, alors $\mu(A) = a \cdot b$.

(2) Si $\{A_n\}$ est une suite de parties disjointes deux à deux, alors

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(3) Si A et B sont deux parties « égales », c'est-à-dire s'il existe une isométrie qui transforme A en B, alors $\mu(A) = \mu(B)$.

La réponse à cette question est négative, comme cela a été démontré par Vitali. Ceci conduit à modifier le problème posé. On n'exige plus de pouvoir mesurer l'aire de toute partie du plan, mais seulement celle d'une famille $\mathfrak{M}$ contenant les rectangles et stable par réunion dénombrable. Les ensembles de la famille $\mathfrak{M}$ sont appelés ensembles mesurables. Ainsi posé le problème admet une solution. Avant d'étudier la mesure des aires, nous considérerons la mesure de Lebesgue qui est la solution d'un problème analogue posé en dimension un. L'étape suivante est la construction de l'intégrale par approximation à partir de l'intégrale de fonctions étagées. Dans le cas de l'intégrale de Riemann, les fonctions étagées considérées sont les fonctions en escalier. En revanche, dans le cas de l'intégrale de Lebesgue, ce sont des fonctions étagées d'un type plus général : les fonctions mesurables étagées. Cette généralisation est essentielle car elle conduit aux énoncés fondamentaux de la théorie de l'intégration comme le théorème de convergence dominée de Lebesgue et celui de Riesz-Fischer, qui n'ont pas d'analogue dans le cas de l'intégrale de Riemann.

La présentation que nous avons choisie des éléments de base de la théorie de la mesure et de l'intégrale est proche de celle de l'excellent ouvrage de W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*. Le chapitre I est une présentation ensembliste aboutissant aux théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée de Lebesgue. C'est au chapitre II qu'il est montré qu'il existe une mesure sur la droite réelle pour laquelle la mesure d'un intervalle est égale à sa longueur. Les espaces fonctionnels L^p sont étudiés au chapitre III. Le théorème de Riesz-Fischer dit que ce sont des espaces normés complets, et ce résultat est fondamental pour les applications à l'analyse fonctionnelle. Le théorème de Fubini que nous voyons au chapitre IV permet le calcul des intégrales multiples considérées au chapitre V.

Dans la présentation fonctionnelle de la théorie de l'intégration, la définition de base est la mesure de Radon qui est une forme linéaire positive sur l'espace des fonctions continues à support compact. Le théorème de Riesz permet de relier les deux points de vue : ensembliste et fonctionnel. Nous présentons cette relation au chapitre VI dans le cas particulier de la droite réelle.

Nous avons particulièrement développé le chapitre VII sur les fonctions définies par des intégrales, car nous estimons que son contenu est important par ses applications à l'analyse. Nous étudions en particulier le comportement asymptotique d'intégrales par la méthode de Laplace et par celle de la phase stationnaire dans le cas des intégrales simples.

Les trois chapitres suivants, VIII, IX et X, contiennent les éléments de base de l'analyse harmonique en une variable : convolution sur le groupe additif des nombres réels et analyse de Fourier.

Le calcul intégral est un outil essentiel de l'analyse mathématique et du calcul des probabilités. Nous l'avons illustré en choisissant sept applications qui sont présentées dans le dernier chapitre. L'équation de la chaleur est importante historiquement. Ce sont en effet les travaux de Fourier sur cette équation qui sont à l'origine de l'analyse qui porte son nom. Les polynômes orthogonaux interviennent dans de nombreuses questions de physique mathématique, et leur étude fait appel à des domaines variés des mathématiques : algèbre linéaire, analyse complexe, théorie spectrale, analyse combinatoire. La solution du problème de l'isopérimètre est une belle application de l'analyse de Fourier à la géométrie.

Nous ne parlons pas dans ce livre des relations qui existent entre le calcul intégral et les notions de base du calcul des probabilités. Nous les avons cependant illustrées dans deux des compléments du chapitre XI : le jeu de pile ou face et la mesure de Lebesgue, et le théorème de la limite centrale.

Chacun des chapitres est suivi d'exercices. Certains d'entre eux constituent des compléments présentés sous forme de problèmes. La bibliographie est loin d'être exhaustive. Nous avons seulement indiqué quelques ouvrages classiques de la théorie de la mesure et de l'intégration. En plusieurs occasions, nous utilisons des résultats d'analyse fonctionnelle pour lesquels nous faisons référence au livre de C. Albert, *Topologie*, et aussi à celui de V. Avanissian, *Initiation à l'analyse fonctionnelle*. Les termes nouveaux sont définis dans le texte à leur première occurence et sont alors écrits en caractères italiques. L'index placé à la fin du livre permet de retrouver cette première occurence.

Ce livre s'adresse aux étudiants de licence de mathématiques. Il a été rédigé à partir des notes d'un cours donné à la faculté des sciences de Tunis, et de celles d'un cours donné à l'université Louis Pasteur de Strasbourg. Je tiens à remercier Daniel Guin de m'avoir encouragé à tirer de ces notes la matière de ce livre.

I

MESURE ET INTÉGRALE

L'un des principaux objectifs de ce cours de calcul intégral est la construction de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue. Nous commençons par dire ce qu'est une mesure. C'est une fonction d'ensemble. À une partie A d'un ensemble X on associe un nombre $\mu(A)$, la mesure de A. Immédiatement, une difficulté se présente car, en général, $\mu(A)$ n'est définie que pour certaines parties de X, appelées ensembles mesurables. On définit ensuite l'intégrale d'une fonction. Ce chapitre contient deux théorèmes fondamentaux du calcul intégral : le théorème de convergence monotone et le théorème de convergence dominée.

I.1. Mesure

Si X est un ensemble, une famille $\mathfrak{A}$ de parties de X est appelée *algèbre de Boole* si

- $\emptyset$ et X appartiennent à $\mathfrak{A}$;

- si A appartient à $\mathfrak{A}$, alors son complémentaire A^c aussi ;

- si A et B appartiennent à $\mathfrak{A}$, alors leur réunion $A \cup B$ et leur intersection $A \cap B$ aussi.

Un ensemble $\mathfrak{M}$ de parties de X est appelé *tribu* (ou σ-algèbre de Boole) si $\mathfrak{M}$ est une algèbre de Boole telle que, si $\{A_n\}$ est une suite d'éléments de $\mathfrak{M}$, alors leur réunion $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ appartient également à $\mathfrak{M}$. Le couple $(X, \mathfrak{M})$ d'un ensemble X et d'une tribu $\mathfrak{M}$ de parties de X est appelé *espace mesurable* et les parties appartenant à $\mathfrak{M}$ sont appelés *ensembles mesurables.*

De la définition d'une tribu on déduit immédiatement les propriétés suivantes.

Soit $(X, \mathfrak{M})$ un espace mesurable.

- Si A et B sont deux ensembles mesurables, alors leur différence $A \setminus B = A \cap (B^c)$ est aussi mesurable.

- Si $\{A_n\}$ est une suite d'ensembles mesurables, leur intersection est aussi mesurable car
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\Big)^c.$$

Sur un ensemble X non vide, il existe toujours au moins deux tribus : la tribu constituée des deux parties $\emptyset$ et X, et la tribu $\mathfrak{P}(X)$ de toutes les parties de X. On dit qu'une tribu $\mathfrak{M}$ est plus petite qu'une tribu $\mathfrak{M}'$ si tout élément de $\mathfrak{M}$ appartient à $\mathfrak{M}'$. La tribu $\{\emptyset, X\}$ est la plus petite des tribus sur X, et $\mathfrak{P}(X)$ la plus grande. Une intersection quelconque de tribus est une tribu. Si $\mathcal{D}$ est un ensemble de parties de X, il existe une plus petite tribu contenant $\mathcal{D}$, à savoir l'intersection $\mathfrak{M}$ des tribus contenant $\mathcal{D}$. (Il en existe au moins une : $\mathfrak{P}(X)$.) On dit que $\mathfrak{M}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{D}$.

Si X est un espace topologique, on notera $\mathfrak{B}(X)$ la *tribu borélienne* de X, c'est-à-dire la tribu engendrée par les ouverts de X. Ses éléments sont appelés *ensembles boréliens*. Notons que tout ouvert, tout fermé est un ensemble borélien. Si $X = \mathbb{R}$, la tribu borélienne $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalles, car tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts. Soit en effet Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et considérons les intervalles ouverts $I =]a, b[$ contenus dans Ω pour lesquels les extrémités a et b sont des nombres rationnels. Ces intervalles constituent une famille dénombrable et leur réunion est égale à Ω. Si $X = \mathbb{R}^2$, la tribu borélienne $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$ est engendrée par les rectangles car tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est une réunion dénombrable de rectangles ouverts. En effet tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ est la réunion des rectangles $R =]a, b[\times]c, d[$ contenus dans Ω pour lesquels les coordonnées a, b, c, d des sommets sont des nombres rationnels, et ces rectangles constituent une famille dénombrable. Plus généralement la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$ est engendrée par les pavés. Rappelons qu'un *pavé* est un produit d'intervalles.

Si $(X, \mathfrak{M})$ est un espace mesurable, une fonction f définie sur X à valeurs dans $[-\infty, \infty]$ est dite *mesurable* si l'image réciproque par f de tout intervalle de $[-\infty, \infty]$ est mesurable. Pour que f soit mesurable il faut et suffit que, pour tout nombre réel α, l'ensemble
$$f^{-1}(]\alpha, \infty]) = \{x \in X \mid f(x) > \alpha\} \tag{$*$}$$
soit mesurable. En effet, si f possède cette propriété, l'ensemble
$$f^{-1}([\alpha, \infty]) = \{x \mid f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \mid f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\right\}$$

est aussi mesurable. Par passage au complémentaire on montre que $f^{-1}([-\infty,\alpha])$ et $f^{-1}([-\infty,\alpha[)$ sont mesurables et par intersection que l'image réciproque par f de tout intervalle de $[-\infty,\infty]$ est mesurable. Notons que dans $(*)$ on peut remplacer $]\alpha,\infty]$ par $[\alpha,\infty]$, ou $[-\infty,\alpha[$, ou $[-\infty,\alpha]$.

Si f et g sont deux fonctions mesurables sur X à valeurs réelles, et si Φ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles, alors la fonction h définie par

$$h(x)=\Phi\big(f(x),g(x)\big)$$

est mesurable. En effet, pour tout nombre réel α, l'ensemble

$$\Omega_\alpha=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid \Phi(u,v)>\alpha\}$$

est un ouvert, et est donc égal à une réunion dénombrable de rectangles ouverts

$$\Omega_\alpha=\bigcup_{n=1}^{\infty}R_n,\qquad R_n=]a_n,b_n[\times]c_n,d_n[.$$

Les ensembles

$$\{x \mid \big(f(x),g(x)\big)\in R_n\}=\{x \mid a_n<f(x)<b_n\}\bigcap\{x \mid x<g(x)<d_n\}$$

sont mesurables, et de même l'ensemble

$$\{x \mid h(x)>\alpha\}=\{x \mid \big(f(x),g(x)\big)\in\Omega_\alpha\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \mid \big(f(x),g(x)\big)\in R_n\}$$

est mesurable. On en déduit que la somme et le produit de deux fonctions mesurables sont mesurables.

Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $[-\infty,\infty]$. Alors la fonction $g=\sup_{n\geq 0}f_n$ est mesurable. En effet

$$\{x \mid g(x)>\alpha\}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\{x \mid f_n(x)>\alpha\}.$$

De même la fonction $g=\limsup_{n\to\infty}f_n$ est mesurable. En effet

$$\limsup_{n\to\infty}f_n(x)=\inf_{m\geq 0}\Big(\sup_{n\geq m}f_n(x)\Big).$$

Si pour tout x la suite $\{f_n(x)\}$ a une limite $f(x)$, alors la fonction f est mesurable.

Une fonction f à valeurs complexes est dite mesurable si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont mesurables.

Si X est un espace topologique et si $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$ est la tribu borélienne de X, une fonction mesurable est appelée *fonction borélienne*. Notons que les fonctions continues sont boréliennes.

Une fonction est dite *étagée* si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Une fonction mesurable étagée f sur un espace mesurable $(X, \mathfrak{M})$ est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables,

$$f = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i} \qquad (A_i \in \mathfrak{M}).$$

Rappelons que la *fonction caractéristique* χ_A d'une partie $A \subset X$ est la fonction qui est égale à 1 sur A et à 0 sur le complémentaire de A.

Proposition I.1.1. *Soit* $(X, \mathfrak{M})$ *un espace mesurable et soit* f *une fonction mesurable à valeurs dans* $[0, \infty]$. *Il existe une suite croissante* $\{u_n\}$ *de fonctions mesurables étagées à valeurs dans* $[0, \infty[$ *telle que, pour tout* $x \in X$,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = f(x).$$

Démonstration. Pour tout entier $n > 0$, et pour $1 \leq i \leq n2^n$, posons

$$\begin{aligned} A_{n,i} &= \left\{ x \;\middle|\; \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}, \\ B_n &= \{ x \mid f(x) \geq n \}. \end{aligned}$$

Ces ensembles sont mesurables. Soit u_n la fonction mesurable étagée définie par

$$u_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{A_{n,i}} + n\chi_{B_n}.$$

Montrons que $u_n(x) \leq u_{n+1}(x)$. Pour cela on remarque que, quand on passe de n à $n+1$, chaque ensemble $A_{n,i}$ est partagé en deux,

$$A_{n,i} = A_{n+1,2i-1} \cup A_{n+1,2i}.$$

Si $x \in A_{n,i}$, $u_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$, et

$$\begin{aligned} &\text{si } x \in A_{n+1,2i-1}, \;\; u_{n+1}(x) = \frac{2i-2}{2^{n+1}} = \frac{i-1}{2^n}, \\ &\text{si } x \in A_{n+1,2i}, \quad\; u_{n+1}(x) = \frac{2i-1}{2^{n+1}} > \frac{i-1}{2^n}. \end{aligned}$$

D'autre part, B_n est la réunion de B_{n+1} et des ensembles $A_{n+1,i}$, i variant de $n2^{n+1}+1$ à $(n+1)2^{n+1}$. Si $x \in B_n$, $u_n(x) = n$, et

$$\begin{aligned} &\text{si } x \in B_{n+1}, \quad u_{n+1}(x) = n+1 > n, \\ &\text{si } x \in A_{n+1,i}, \ u_{n+1}(x) = \frac{i-1}{2^{n+1}} \geq n \qquad (n2^{n+1}+1 \leq i \leq (n+1)2^{n+1}). \end{aligned}$$

Montrons maintenant qu'en tout point x la suite $\{u_n(x)\}$ converge vers $f(x)$. En effet, si $f(x) < \infty$, pour $n > f(x)$,

$$f(x) - u_n(x) \leq \frac{1}{2^n},$$

et, si $f(x) = \infty$, $u_n(x) = n$. □

Remarquons que si la fonction f est bornée ($f(x) \leq M < \infty$), la suite $\{u_n\}$ converge vers f uniformément.

Une *mesure* sur un espace mesurable $(X, \mathfrak{M})$ est une application μ de $\mathfrak{M}$ dans $[0, \infty]$ vérifiant
- $\mu(\emptyset) = 0$,
- si A et B sont deux ensembles mesurables disjoints,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B),$$

- si $\{A_n\}$ est une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints,

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

La somme du second membre peut être égale à $+\infty$, si l'un des nombres $\mu(A_n)$ est égale à $+\infty$, ou si la série est divergente.

Le nombre $\mu(A)$ est appelé la mesure de l'ensemble mesurable A. La mesure $\mu(X)$ de X est appelée la *masse totale* de la mesure μ. Un *espace mesuré* est un triplet $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ où μ est une mesure définie sur l'espace mesurable $(X, \mathfrak{M})$.

Soit X un ensemble et $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}(X)$ la tribu de toutes les parties de X. Pour $x_0 \in X$, la *mesure de Dirac* δ_{x_0} est définie par

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{matrix} 1 \text{ si } x_0 \in E \\ 0 \text{ sinon.} \end{matrix}$$

La *mesure de comptage* μ est définie par $\mu(E) = \#(E)$, où $\#(E)$ désigne le nombre d'éléments de E.

Soit $\{x_n\}$ une suite de points de X et $\{\alpha_n\}$ une suite de nombres ≥ 0. Posons

$$\mu(E) = \sum_{\{n|x_n \in E\}} \alpha_n.$$

Ce nombre est bien défini,

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \chi_E(x_n),$$

et μ est une mesure sur $(X, \mathfrak{M})$. Pour le vérifier considérons une suite $\{A_k\}$ d'ensembles deux à deux disjoints, et soit E leur réunion. Alors

$$\chi_E(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k}(x),$$

et

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k}(x) \Big) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \chi_{A_k}(x) \Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait suivant : si $\{u_{pq}\}$ est une suite double de nombres ≥ 0, alors

$$\sum_{p=1}^{\infty} \Big(\sum_{q=1}^{\infty} u_{pq} \Big) = \sum_{q=1}^{\infty} \Big(\sum_{p=1}^{\infty} u_{pq} \Big) \; (\leq +\infty).$$

Cette égalité signifie que soit les deux membres sont finis et égaux, soit ils sont tous les deux infinis. Une telle mesure est appelée *mesure discrète*.

Si X est un espace topologique et $\mathfrak{B}$ est la tribu borélienne de X, une mesure sur l'espace mesurable $(X, \mathfrak{B})$ est appelée *mesure borélienne*.

Soient $X = \mathbb{R}$ et $\mathfrak{B}$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. Nous montrerons au chapitre II qu'il existe une unique mesure λ sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ telle que, si I est un intervalle d'extrémités a et b,

$$\lambda(I) = b - a.$$

Cette mesure s'appelle la *mesure de Lebesgue* de $\mathbb{R}$. Nous verrons d'autres exemples importants de mesures au chapitre V.

I.2. Intégrale des fonctions positives

Nous aurons à considérer des fonctions prenant la valeur $+\infty$ et des ensembles de mesure infinie. Nous adoptons les conventions suivantes :

$$\begin{aligned}
&a + \infty = \infty + a = \infty, \text{ si } a \in [0, \infty],\\
&a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty, \text{ si } a \in]0, \infty],\\
&0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Fixons un espace mesuré $(X, \mathfrak{M}, \mu)$. Nous définissons d'abord l'intégrale d'une fonction mesurable étagée, puis cette définition sera étendue au cas d'une fonction mesurable positive par passage à la borne supérieure.

Soit f une fonction mesurable étagée à valeurs dans $[0, \infty]$, soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ les valeurs prises par f et

$$E_j = \{x \in X \mid f(x) = \alpha_j\} \quad (j = 1, \ldots, N).$$

L'intégrale de f est définie par

$$\int_X f d\mu = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \mu(E_j).$$

Si f est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables,

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i},$$

alors

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

Il existe en effet des ensembles mesurables disjoints C_k tels que tout ensemble A_i soit une réunion de certains des ensembles C_k,

$$\chi_{A_i} = \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_{ik} \chi_{C_k},$$

où les nombres ε_{ik} sont égaux à 0 ou 1. Par suite

$$\mu(A_i) = \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_{ik} \mu(C_k).$$

La fonction f s'écrit

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \Big(\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_{ik} \chi_{C_k}\Big) = \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_{ik}\Big) \chi_{C_k}.$$

Si x appartient à l'ensemble C_k, alors

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_{ik}.$$

L'ensemble E_j est donc égal à la réunion des ensembles C_k pour lesquels $\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_{ik} = \alpha_j$. Par suite l'intégrale de f s'écrit

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu &= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \mu(E_j) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \Big(\sum_{\{k \mid \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_{ik} = \alpha_j\}} \mu(C_k)\Big) = \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_{ik}\Big) \mu(C_k) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \Big(\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_{ik} \mu(C_k)\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i). \end{aligned}$$

Soit maintenant f une fonction mesurable à valeurs dans $[0, \infty]$; l'*intégrale* de f est définie par

$$\int_X f\, d\mu = \sup \Big\{ \int_X u\, d\mu \;\Big|\; u \in \mathcal{E}(X, \mathfrak{M}),\ 0 \leq u \leq f \Big\},$$

où $\mathcal{E}(X, \mathfrak{M})$ désigne l'espace des fonctions mesurables étagées définies sur X. C'est un nombre réel positif ou nul, ou $+\infty$.

On vérifie facilement les propriétés suivantes de l'intégrale. Si f et g sont deux fonctions mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$, et si $f \leq g$, alors

$$\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu.$$

Si f est une fonction mesurable à valeurs dans $[0, \infty]$ et si λ est un nombre réel ≥ 0,

$$\int_X \lambda f\, d\mu = \lambda \int_X f\, d\mu.$$

INDEX