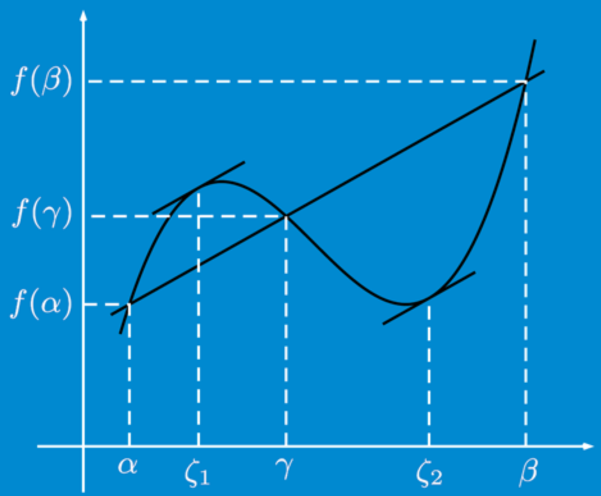
COLLECTION ENSEIGNEMENT SUP //// Mathématiques

L3M1

# Problèmes d'analyse II

## CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ

**EXERCICES CORRIGÉS**




Wieslawa J. Kaczor et Maria T. Nowak

Traduction : Eric Kouris

EDP SCIENCES

# PROBLÈMES D'ANALYSE II
# Continuité et dérivabilité

**Wieslawa J. Kaczor, Maria T. Nowak**
**Traduction : Eric Kouris**

**Collection dirigée par Daniel Guin**

17, avenue du Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

This work was originally published in Polish, as *Zadania z Analizy Matematycznej. Część Druga Funkcje Jednej Zmiennej–Rachunek Różniczowy*, © 1998 Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin. Published in English by the American Mathematical Society under the title "*Problems in Mathematical Analysis II: Continuity and Differentiation*", © 2001 American Mathematical Society. The present translation was created for EDP Sciences under authority of the American Mathematical Society and is published by permission.

Imprimé en France

**ISBN** : 978-2-86883-0086-5

# TABLE DES MATIÈRES

**Préface du traducteur** **v**

**Préface à l'édition anglaise** **vii**

**Notations et terminologie** **ix**

**I Limites et continuité** **1**

Énoncés . . . 1

I.1 Limite d'une fonction . . . 1

I.2 Propriétés des fonctions continues . . . 7

I.3 Propriété des valeurs intermédiaires . . . 13

I.4 Fonctions semi-continues . . . 17

I.5 Continuité uniforme . . . 22

I.6 Équations fonctionnelles . . . 25

I.7 Fonctions continues sur un espace métrique . . . 30

Solutions . . . 35

I.1 Limite d'une fonction . . . 35

I.2 Propriétés des fonctions continues . . . 52

I.3 Propriété des valeurs intermédiaires . . . 69

I.4 Fonctions semi-continues . . . 82

I.5 Continuité uniforme . . . 92

I.6 Équations fonctionnelles . . . 101

I.7 Fonctions continues sur un espace métrique . . . 117

**II Dérivation** **129**

Énoncés . . . 129

II.1 Dérivée d'une fonction réelle . . . 129

II.2 Théorème des accroissements finis . . . 138

II.3 Formule de Taylor et règle de L'Hospital . . . . . . . . . . . . . 144
II.4 Fonctions convexes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 153
II.5 Applications des dérivées . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 158
II.6 Dérivabilité forte et dérivabilité au sens de Schwarz . . . . . . 167
Solutions . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 170
II.1 Dérivée d'une fonction réelle . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 170
II.2 Théorème des accroissements finis . . . . . . . . . . . . . . . . . 190
II.3 Formule de Taylor et règle de L'Hospital . . . . . . . . . . . . . 201
II.4 Fonctions convexes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 222
II.5 Applications des dérivées . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 238
II.6 Dérivabilité forte et dérivabilité au sens de Schwarz . . . . . . 262

**III Suites et séries de fonctions** **269**
Énoncés . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 269
III.1 Suites de fonctions, convergence uniforme . . . . . . . . . . . . 269
III.2 Séries de fonctions, convergence uniforme . . . . . . . . . . . . 275
III.3 Séries entières . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 284
III.4 Séries de Taylor . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 290
Solutions . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 296
III.1 Suites de fonctions, convergence uniforme . . . . . . . . . . . . 296
III.2 Séries de fonctions, convergence uniforme . . . . . . . . . . . . 313
III.3 Séries entières . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 332
III.4 Séries de Taylor . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 349

**Bibliographie** **369**

**Table des renvois** **371**

**Index** **375**

# PRÉFACE DU TRADUCTEUR

Ce livre est le second d'une série de trois recueils d'exercices corrigés traitant des bases de l'analyse réelle. Il s'adresse d'abord aux étudiants, principalement ceux des niveaux L1 à L3, qu'ils soient à l'université ou en CPGE. Il intéressera aussi les candidats aux concours du CAPES et de l'agrégation de mathématiques qui y trouveront autant les théorèmes qu'ils doivent connaître que des exercices pour les illustrer.

Ce second volume traite principalement des fonctions réelles d'une variable réelle. Le premier chapitre traite en profondeur des fonctions continues (la dernière section, sur les fonctions entre espaces métriques, intéressera plus particulièrement les étudiants de L3 et M1). Le second chapitre aborde les fonctions dérivables (la dernière section traitant de généralisations de la notion de dérivée, thème très rarement abordé dans les ouvrages s'adressant aux étudiants du premier cycle universitaire) et le dernier chapitre se concentre sur les séries de fonctions. Chaque section, centrée sur un thème, commence par des exercices relativement simples et se poursuit par des problèmes plus difficiles, certains étant des théorèmes classiques. Souvent, différents aspects d'un même thème sont traités en une série d'exercices successifs pour permettre d'en approfondir la compréhension.

Tous les exercices sont corrigés, le plus souvent en détail, ce qui permettra aux étudiants de ne pas « sécher » sur un exercice difficile. Nous les invitons cependant à chercher par eux-mêmes les exercices avant de regarder les solutions pour ne pas se priver du plaisir de les résoudre. Nous insistons aussi sur le fait que les auteurs ne donnent pas nécessairement toutes les étapes d'un calcul lorsqu'ils considèrent que celui-ci ne pose pas de problèmes techniques. C'est bien sur aux étudiants de prendre le temps de rédiger entièrement leurs solutions.

Nous avons ajouté dans cette traduction quelques notes pour préciser certaines définitions et éviter ainsi d'avoir à chercher dans d'autres ouvrages. Nous avons aussi ajouter en note les noms de certaines propriétés et relations pour inviter les étudiants à engager des recherches par eux-mêmes. L'index à la fin de l'ouvrage permet de facilement retrouver une définition et la table des renvois permet de voir les liens entre les différents problèmes dans ce volume et dans les deux autres.

Je tiens à remercier Daniel Guin et Xavier Cottrell pour avoir pris le temps de relire cette traduction et pour les remarques qu'ils m'ont faites afin d'améliorer le style et de corriger les erreurs. Je reste responsable de celles qui subsisteraient. Je souhaite aussi remercier pour sa disponibilité Patrick Fradin, l'auteur du logiciel TeXgraph avec lequel toutes les figures de cet ouvrage et l'illustration de la couverture ont été réalisées.

É. Kouris

# PRÉFACE À L'ÉDITION ANGLAISE

Cet ouvrage est le second volume d'une série de recueils de problèmes d'analyse. Il traite des fonctions réelles d'une variable réelle, à l'exception de la section I.7 où sont abordées les fonctions définies sur un espace métrique. Comme dans le premier volume, *Problèmes d'Analyse I, Nombres réels, suites et séries*, chaque chapitre est divisé en deux parties. La première partie est composée d'exercices et de problèmes, la seconde des solutions à ces problèmes. Bien que souvent un problème donné admette plusieurs solutions, nous n'en présentons qu'une. De plus, les problèmes sont divisés en sections suivant les méthodes utilisées pour leur résolution. Par exemple, si un problème se trouve dans la section *Fonctions convexes*, cela signifie que l'on utilise des propriétés des fonctions convexes dans la solution. Bien que chaque section commence par des exercices relativement simples, on trouvera aussi des problèmes assez difficiles, dont certains sont, en fait, des théorèmes.

Ce livre s'adresse principalement aux étudiants en mathématiques mais il couvre des thèmes que les enseignants pourront inclure dans leurs cours ou utiliser dans des séances de travaux dirigés. Par exemple, suivant Steven Roman [*Amer. Math. Monthly*, 87 (1980), pp. 805-809], nous présentons une démonstration de la formule bien connue de Faà di Bruno donnant la dérivée $n$-ième de la composée de deux fonctions. Les applications de cette formule aux fonctions analytiques réelles données au chapitre III sont principalement tirées de *A Primer of Real Analytic Functions* de Steven G. Kranz et Harold R. Parks. En fait, nous avons trouvé cet ouvrage si stimulant que nous n'avons pas résisté à y emprunter quelques théorèmes. Nous souhaitons aussi mentionner ici une généralisation du théorème de Tauber due à Hardy et Littlewood. La démonstration que nous en donnons est basée sur la publication de Karamata [*Math. Zeitschrift*, 2 (1918)].

Nous avons emprunté librement dans plusieurs ouvrages, recueils de problèmes et sections de problèmes de journaux tels que *American Mathematical Monthly*, *Mathematics Today* (en russe) et *Delta* (en polonais). Nous donnons la liste complète des livres dans la bibliographie. Comme dans le premier volume, donner toutes les sources originales dépassait nos objectifs et nous avons pu oublier certaines contributions. Nous présentons nos excuses si cela s'est produit.

Toutes les notations et définitions utilisées dans ce volume sont standards. Néanmoins, pour éviter toute ambiguïté et dans un souci de cohérence, une liste des notations et définitions est incluse au début de ce livre. Nos conventions pour les renvois s'expliquent le mieux par des exemples : I.2.13 et I.2.13 (vol. I) représentent respectivement le numéro du problème dans ce volume et dans le volume I.

Nous devons beaucoup à de nombreux amis et collègues avec lesquels nous avons eu de nombreuses conversations productives. Une mention particulière doit être faite pour Tadeusz Kuczumow avoir suggéré différents problèmes et solutions et pour Witold Rzymowski qui nous a fourni son manuscrit [28]. Nous remercions aussi sincèrement Armen Grigoryan, Małgorzata Koter-Mórgowska, Stanisław Prus et Jadwiga Zygmunt pour avoir réalisé les figures et pour nous avoir aidés à les incorporer au texte. Nous avons aussi une grande dette envers le professeur Richard J. Libera de l'université du Delaware pour son aide généreuse dans la traduction anglaise et pour toutes ses suggestions et corrections qui ont grandement amélioré autant la forme que le contenu des différents volumes. Nous aimerions aussi remercier l'équipe de l'AMS pour leur assistance (par courriel) pour mener à bien notre travail.

W. J. Kaczor, M. T. Nowak

# NOTATIONS ET TERMINOLOGIE

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des nombres réels positifs.
- $\overline{\mathbb{R}}$ est la droite réelle achevée, autrement dit, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs.
- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- $[a\,, b]$ est l'intervalle fermé d'extrémités $a$ et $b$.
- $]a\,, b[$ est l'intervalle ouvert d'extrémités $a$ et $b$.
- $[x]$ est la partie entière du nombre réel $x$ (on a conservé la notation anglophone).
- Pour $x \in \mathbb{R}$,
$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad x > 0, \\ -1 & \text{pour} \quad x < 0, \\ 0 & \text{pour} \quad x = 0. \end{cases}$$
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$, on pose aussi $0! = 1$,

  $(2n)!! = 2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n-2) \times 2n$,

  $(2n-1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-3) \times (2n-1)$.

- Si $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ est non vide et majoré, alors $\sup \mathbf{A}$ est le plus petit majorant de $\mathbf{A}$. Si l'ensemble non vide $\mathbf{A}$ n'est pas majoré, on pose alors $\sup \mathbf{A} = +\infty$.

- Si $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ est non vide et minoré, alors $\inf \mathbf{A}$ est le plus grand minorant de $\mathbf{A}$. Si l'ensemble non vide $\mathbf{A}$ n'est pas minoré, on pose alors $\inf \mathbf{A} = -\infty$.

- Une suite $\{a_n\}$ est dite croissante (resp. décroissante) si $a_{n+1} \geqslant a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (resp. $a_{n+1} \leqslant a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). La classe des suites monotones est formée des suites croissantes et des suites décroissantes.

- Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites réelles ($b_n \neq 0$ pour tout $n$). Si le quotient $a_n/b_n$ tend vers 0 (resp. reste borné) lorsque $n$ tend vers $+\infty$, on écrit alors $a_n = o(b_n)$ (resp., $a_n = O(b_n)$).

- Un réel $c$ est une valeur d'adhérence de la suite $\{a_n\}$ s'il existe une sous-suite $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$ convergente vers $c$.

- Soit $\mathbf{S}$ l'ensemble de toutes les valeurs d'adhérence de $\{a_n\}$. La limite inférieure, $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n$, et la limite supérieure, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n$, sont définies comme suit :
$$\varlimsup_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ n'est pas majorée,} \\ -\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ est majorée et } \mathbf{S} = \emptyset, \\ \sup \mathbf{S} & \text{si } \{a_n\} \text{ est majorée et } \mathbf{S} \neq \emptyset, \end{cases}$$
$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} -\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ n'est pas minorée,} \\ +\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ est minorée et } \mathbf{S} = \emptyset, \\ \inf \mathbf{S} & \text{si } \{a_n\} \text{ est minorée et } \mathbf{S} \neq \emptyset. \end{cases}$$

- Un produit infini $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ est dit convergent s'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$ pour $n \geqslant n_0$ et la suite $\{a_{n_0} a_{n_0+1} \cdot \cdots \cdot a_{n_0+n}\}$ converge, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, vers une limite $P_0$ non nulle. Le nombre $P = a_1 a_2 \cdot \cdots \cdot a_{n_0-1} \cdot P_0$ est appelée la valeur du produit infini.

- Si $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ et si $f$ est une fonction définie sur $\mathbf{X}$, $f_{|\mathbf{A}}$ est la restriction de $f$ à $\mathbf{A}$.

Si $(\mathbf{X}, d)$ est un **espace métrique**, $x \in \mathbf{X}$ et $\mathbf{A}$ un sous-ensemble non vide de $\mathbf{X}$, alors

- $\mathbf{A}^c = \mathbf{X} \setminus \mathbf{A}$ est le complémentaire de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{X}$,

- $\mathbf{B}_{\mathbf{X}}(x,r)$, $\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{X}}(x,r)$ représentent respectivement la boule ouverte et la boule fermée de centre $x$ et de rayon $r$. Si $\mathbf{X}$ est fixé, on omet l'indice et on écrit simplement $\mathbf{B}(x,r)$, $\overline{\mathbf{B}}(x,r)$,

- $\mathring{\mathbf{A}}$ est l'intérieur de $\mathbf{A}$ dans l'espace métrique $(\mathbf{X},d)$,

- $\overline{\mathbf{A}}$ est l'adhérence de $\mathbf{A}$ dans l'espace métrique,

- $\partial\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{X} \setminus \mathbf{A}}$ est la frontière de $\mathbf{A}$,

- $\operatorname{diam}(\mathbf{A}) = \sup\{d(x,y) : x,y \in \mathbf{A}\}$ est le diamètre de l'ensemble $\mathbf{A}$,

- $\operatorname{dist}(x,\mathbf{A}) = \inf\{d(x,y) : y \in \mathbf{A}\}$ est la distance de $x$ à l'ensemble $\mathbf{A}$,

- $\mathbf{A}$ est un ensemble de type $\mathcal{F}_\sigma$ si c'est une union dénombrable d'ensembles fermés dans $(\mathbf{X},d)$,

- $\mathbf{A}$ est un ensemble de type $\mathcal{G}_\delta$ si c'est une intersection dénombrable d'ensembles ouverts dans $(\mathbf{X},d)$,

- $\mathbf{X}$ est dit connexe s'il n'existe pas de sous-ensembles ouverts disjoints $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ de $\mathbf{X}$ tels que $\mathbf{X} = \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$.

- $$\chi_{\mathbf{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbf{A}, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{A} \end{cases}$$

  est la fonction caractéristique de $\mathbf{A}$.

**Continuité**, **dérivabilité**.

- $\mathscr{C}_{\mathbf{A}}$ est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{A}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- $\mathscr{C}^n_{]a,b[}$ est l'ensemble des fonctions $n$ fois continûment dérivables sur $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- $\mathscr{C}^1_{[a,b]}$ est l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, en considérant aux extrémités respectivement la dérivée à droite et la dérivée à gauche. L'ensemble $\mathscr{C}^n_{[a,b]}$ des fonctions $n$ fois continûment dérivables sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est définie récursivement.

- $\mathscr{C}^\infty_{]a,b[}$, $\mathscr{C}^\infty_{[a,b]}$ est l'ensemble des fonctions infiniment dérivables respectivement sur $]a\,,b[$ et $[a\,,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si $f$ et $g$ sont des fonctions réelles d'une variable réelle, alors

- $f(a^+)$ et $f(a^-)$ représentent respectivement la limite à droite et la limite à gauche de $f$ en $a$,
- si le quotient $f(x)/g(x)$ tend vers 0 (resp. reste borné) lorsque $x$ tend vers $x_0$, on écrit alors $f(x) = o(g(x))$ (resp. $f(x) = O(g(x))$),
- $f^{(n)}$ est la dérivée $n$-ième de $f$,
- $f'_+(a)$, $f'_-(a)$ représentent respectivement la dérivée à droite et la dérivée à gauche de $f$ en $a$.

# I

# LIMITES ET CONTINUITÉ

## Énoncés

### I.1. Limite d'une fonction

On adopte les définitions suivantes.

***Définition 1.*** Une fonction réelle $f$ est dite *croissante* (resp. *strictement croissante*, *décroissante*, *strictement décroissante*) sur un ensemble non vide $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ si $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbf{A}$, implique $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (resp. $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, $f(x_1) > f(x_2)$). Une fonction croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou décroissante) est dite *monotone* (resp. *strictement monotone*).

***Définition 2.*** L'ensemble $]a - \varepsilon\,, a + \varepsilon[ \setminus \{a\}$, où $\varepsilon > 0$, est un *voisinage épointé* du point $a \in \mathbb{R}$.

**I.1.1.** Trouver les limites suivantes ou dire si elles n'existent pas.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]$, $a, b > 0$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{[x]}{x}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x)}$.

**I.1.2.** Soit $f\colon\, ]-a\,,a[\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction. Démontrer que

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = l$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(\sin x) = l$,

(b) si $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = l$, alors $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(|x|) = l$. L'implication réciproque est-elle exacte ?

**I.1.3.** Soit $f\colon\, ]-a\,,a[\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}_+^*$ une fonction vérifiant $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right) = 2$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

**I.1.4.** Soit $f$ une fonction définie sur un voisinage épointé de $a$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(f(x)+\frac{1}{|f(x)|}\right) = 0$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$.

**I.1.5.** Prouver que si $f$ est une fonction bornée sur $[0\,,1]$ vérifiant $f(ax) = bf(x)$ pour $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{a}$ et $a, b > 1$, alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

**I.1.6.** Calculer

(a) $$\lim_{x\to 0}\left(x^2\left(1+2+3+\ldots+\left[\frac{1}{|x|}\right]\right)\right),$$

(b) $$\lim_{x\to 0^+}\left(x\left(\left[\frac{1}{x}\right]+\left[\frac{2}{x}\right]+\ldots+\left[\frac{k}{x}\right]\right)\right),\quad k\in\mathbb{N}^*.$$

**I.1.7.** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{[P(x)]}{P([x])}$, où $P$ est un polynôme à coefficients strictement positifs.

**I.1.8.** Montrer sur un exemple que la condition

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+f(2x))=0 \tag{$*$}$$

n'implique pas que $f$ admet une limite en 0. Prouver que s'il existe une fonction $\varphi$ telle que, dans un voisinage épointé de 0, l'inégalité $f(x)\geqslant\varphi(x)$ est vérifiée et $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$, alors $(*)$ implique $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

**I.1.9.**

(a) Donner un exemple de fonction $f$ vérifiant la condition

$$\lim_{x\to 0}(f(x)f(2x))=0$$

et telle que $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ n'existe pas.

(b) Montrer que si les inégalités $f(x)\geqslant |x|^{\alpha}$ $(\frac{1}{2}<\alpha<1)$ et $f(x)f(2x)\leqslant |x|$ sont vérifiées dans un voisinage épointé de 0, alors $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

**I.1.10.** Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(ax)}{x^{\alpha}}=g(a)$ pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$. Prouver qu'il existe $c$ tel que $g(a)=ca^{\alpha}$.

**I.1.11.** Soit $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction monotone telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=1$. Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(cx)}{f(x)}=1$ pour tout $c>0$.

**I.1.12.** Prouver que si $a>1$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, alors

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x}=+\infty$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^{\alpha}}=+\infty$.

**I.1.13.** Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0$ si $\alpha>0$.

**I.1.14.** Pour $a>0$, prouver que $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$. Utiliser cette égalité pour prouver la continuité de la fonction exponentielle.

**I.1.15.** Montrer que

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

**I.1.16.** Prouver que $\lim_{x\to 0} \ln(1+x) = 0$. En déduire que la fonction logarithme est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

**I.1.17.** Déterminer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$, (b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{a}$, $a > 0$,

(c) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

**I.1.18.** Trouver

(a) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$, (b) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$,

(c) $\displaystyle \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$, (d) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} (e^x - 1)^{\frac{1}{x}}$,

(e) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

**I.1.19.** Déterminer les limite suivantes :

(a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + 2\operatorname{Arctan} 3x + 3x^2}{\ln\left(1 + 3x + \sin^2 x\right) + xe^x}$, (b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\tan x^2}$,

(c) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-e^{-x}} - \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$, (d) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(1 + x^2\right)^{\operatorname{cotan} x}$.

**I.1.20.** Calculer

(a) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$, (b) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} x\left(\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - \ln\frac{x}{2}\right)$.

**I.1.21.** On suppose que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$ et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $m, M$ strictement positifs tels que $m \leqslant \frac{f(x)}{x^\alpha} \leqslant M$ pour $x > 0$ dans un voisinage de 0. Prouver que si $\alpha \lim_{x\to 0^+} g(x)\ln x = \gamma$, alors $\lim_{x\to 0^+} f(x)^{g(x)} = e^\gamma$. Dans le cas où $\gamma = +\infty$ ou $\gamma = -\infty$, on prend les conventions $e^{+\infty} = +\infty$ et $e^{-\infty} = 0$.

**I.1.22.** On suppose que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$. Prouver que si $\lim_{x\to 0} g(x)(f(x) - 1) = \gamma$, alors $\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = e^\gamma$.

**I.1.23.** Calculer

(a) $$\lim_{x\to 0^+}\left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)^x,$$

(b) $$\lim_{x\to 0}\left(1+xe^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^4}\right)^{\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)},$$

(c) $$\lim_{x\to 0}\left(1+e^{-\frac{1}{x^2}}\operatorname{Arctan}\frac{1}{x^2}+xe^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^4}\right)^{\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)}.$$

**I.1.24.** Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que la suite $\{f(a+n)\}$ converge vers 0 pour tout $a \geqslant 0$. La limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe-t-elle ?

**I.1.25.** Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que la suite $\{f(an)\}$ converge vers 0 pour tout $a > 0$. La limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe-t-elle ?

**I.1.26.** Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que la suite $\{f(a+bn)\}$ converge vers 0 pour tout $a \geqslant 0$ et tout $b > 0$. La limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe-t-elle ?

**I.1.27.** Prouver que si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

**I.1.28.** Soit $f$ une fonction définie sur $]a\,,+\infty[$ et bornée sur tout intervalle borné $]a\,,b[$, $a < b$. Prouver que si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x)) = l$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = l$.

**I.1.29.** Soit $f$ une fonction définie sur $]a\,,+\infty[$ et minorée sur tout intervalle borné $]a\,,b[$, $a < b$. Prouver que si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x)) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty$.

**I.1.30.** Soit $f$ une fonction définie sur $]a\,,+\infty[$ et bornée sur tout intervalle borné $]a\,,b[$, $a < b$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^k}$ existe pour un entier $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{k+1}} = \frac{1}{k+1}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^k}.$$

**I.1.31.** Soit $f$ une fonction définie sur $]a\,,+\infty[$, bornée sur tout intervalle borné $]a\,,b[$ $(a < b)$ et telle que $f(x) \geqslant c > 0$ pour tout $x \in\, ]a\,,+\infty[$. Prouver que si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$ existe, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}}$ existe aussi et

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}\,.$$

**I.1.32.** On suppose que $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\left[\frac{1}{x}\right]^{-1}\right) = 0$. Ceci implique-t-il que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe ?

**I.1.33.** Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que la suite $\left\{f\left(\frac{a}{n}\right)\right\}$ converge vers 0 pour tout $a \in \mathbb{R}$. La fonction $f$ admet-elle une limite en 0 ?

**I.1.34.** Prouver que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ si $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right)\right) = 0$.

**I.1.35.** Prouver que si $f$ est croissante (resp. décroissante) sur $]a\,,b[$, on a alors, pour tout $x_0 \in\, ]a\,,b[$,

(a) $f(x_0^+) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \inf\limits_{x>x_0} f(x)$ (resp. $f(x_0^+) = \sup\limits_{x>x_0} f(x)$),

(b) $f(x_0^-) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \sup\limits_{x<x_0} f(x)$ (resp. $f(x_0^-) = \inf\limits_{x<x_0} f(x)$),

(c) $f(x_0^-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0^+)$ (resp. $f(x_0^-) \geqslant f(x_0) \geqslant f(x_0^+)$).

**I.1.36.** Prouver que si $f$ est croissante sur $]a\,,b[$, on a alors, pour tout $x_0 \in\, ]a\,,b[$,

(a) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x^-) = f(x_0^+)$,

(b) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x^+) = f(x_0^-)$.

**I.1.37.** Prouver le *théorème de Cauchy* suivant. Pour que $f$ ait une limite lorsque $x$ tend vers $a$, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ dès que $0 < |x - a| < \delta$ et $0 < |x' - a| < \delta$. Formuler et prouver une condition nécessaire et suffisante analogue pour que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe.

**I.1.38.** Montrer que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ et $\lim\limits_{\substack{y\to A\\ y\neq A}} g(y) = B$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = B$, pour autant que $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ soit bien définie et que $f$ n'atteigne pas la valeur $A$ dans un voisinage épointé de $a$.

**I.1.39.** Trouver des fonctions $f$ et $g$ telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ et $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$, mais $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) \neq B$.

**I.1.40.** Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \mapsto f(x) - x$ soit périodique de période 1. On note $f^n$ la $n$-ième *itérée* de $f$, autrement dit, $f^1 = f$ et $f^n = f\circ f^{n-1}$ pour $n \geqslant 2$. Prouver que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f^n(0)}{n}$ existe, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f^n(x)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f^n(0)}{n} \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

**I.1.41.** Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \mapsto f(x) - x$ soit périodique de période 1 et $f(0) > 0$. On note $f^n$ la $n$-ième itérée de $f$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Prouver que si $m_p$ est le plus petit entier strictement positif tel que $f^{m_p}(0) > p$, alors

$$\frac{p}{m_p} \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \frac{f^n(0)}{n} \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{f^n(0)}{n} \leqslant \frac{p}{m_p} + \frac{1+f(0)}{m_p}.$$

**I.1.42.** Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \mapsto f(x) - x$ soit périodique de période 1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f^n(x)}{n}$ existe et que sa valeur est la même pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^n$ représentant la $n$-ième itérée de $f$.

## I.2. Propriétés des fonctions continues

**I.2.1.** Trouver tous les points où la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel,} \\ \sin|x| & \text{si } x \text{ est rationnel} \end{cases}$$

est continue.

This page intentionally left blank

# INDEX


**B**

base de Hamel, 116

**C**

classe de Baire, 32
convergence
  au sens de Cesàro, 28
  continue, 272
  uniforme, 269
critère de convergence uniforme de Cauchy, 270

**D**

dérivée
  de Schwarz (dérivée symétrique), 167
  de Schwarz inférieure, supérieure, 167
  forte, 167
  forte inférieure, supérieure, 167
dérivées de Dini, 234
déterminant de Vandermonde, 309
droite réelle achevée, 17

**E**

ensemble
  de Borel, 30
  de Cantor, 69
  de première catégorie, 32
  de seconde catégorie, 126
  $\mathcal{F}_\sigma$, $\mathcal{G}_\delta$, ix
  nulle part dense, 32
  résiduel, 168
équation fonctionnelle
  de Cauchy, 25
  de Jensen, 26

**F**

fonction
  analytique réelle, 293
  concave, 153
  convexe, 12, 153
  croissante, décroissante, monotone, 1
  de Darboux, 13
  de Dirichlet, 63
  de Riemann, 8
  de Weierstrass, 284
  dérivable au sens de Schwarz, 167
  fortement dérivable, 167
  mid-convexe, 157
  monotone par morceaux, 16
  semi-continue inférieurement, supérieurement, 17
  sous-additive, 157
  strictement convexe, 153
  uniformément continue, 22
  uniformément dérivable, 141
  uniformément Schwarz-dérivable, 169
  zêta de Riemann, 284
formule
  de Faà di Bruno, 137
  de la moyenne, 212
  de Leibniz, 182
  de Taylor
    reste de Cauchy, 145
    reste de Lagrange, 145
    reste de Peano, 144
    reste de Schlömilch-Roche, 144
    reste de Young, 144
    reste intégral, 145
  du binôme de Newton, 291