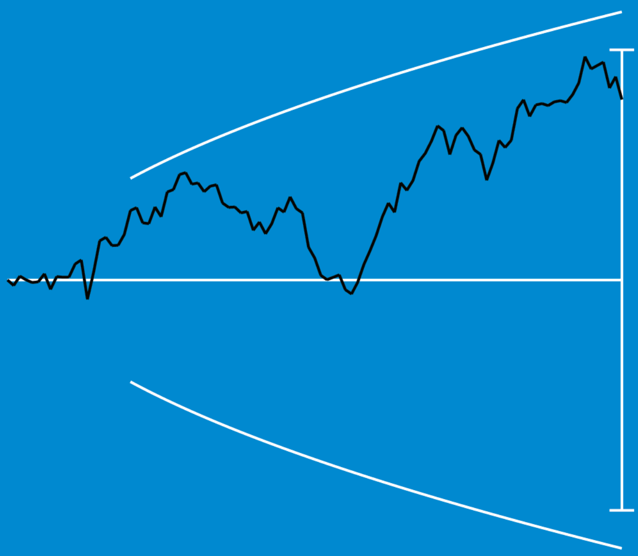
COLLECTION ENSEIGNEMENT SUP //// Mathématiques

L3M1

Probabilité

Philippe Barbe et Michel Ledoux



EDP SCIENCES

PROBABILITÉ

PROBABILITÉ

Philippe Barbe et Michel Ledoux

Collection dirigée par Daniel Guin

EDP SCIENCES

17, avenue du Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

L'*illustration de couverture* représente une marche aléatoire centrée, linéairement interpolée ; les courbes supérieure et inférieure sont les bornes de la loi du logarithme itéré, et l'intervalle vertical atteint par la marche aléatoire illustre une application du théorème limite central.

Imprimé en France

ISBN : 978-2-86883-931-2

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

Le calcul des probabilités est une branche très vivante des mathématiques actuelles. Les premières formalisations de la notion de hasard au XVII^{e} siècle répondaient pour l'essentiel à diverses questions issues de la théorie des jeux. Au cours du XX^{e} siècle, le calcul des probabilités a trouvé avec A. N. Kolmogorov une axiomatique rigoureuse et efficace s'appuyant sur l'intégration de Lebesgue. L'intuition probabiliste est aujourd'hui un outil efficace dans diverses branches des mathématiques, de l'analyse et la théorie de la mesure jusqu'à la géométrie et même l'algèbre, et forme le support théorique des statistiques modernes.

Ce livre est consacré à l'exposition des notions de base du calcul des probabilités. Il s'appuie de façon essentielle sur la théorie de la mesure et de l'intégration de Lebesgue. (Mesures de probabilités discrètes ou à densité sont donc étudiées dans un même cadre, au titre d'exemples priviligiés les plus usuels.) Les deux premiers chapitres sont en fait un rappel des éléments de base de la théorie élémentaire de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue. Ils ne peuvent cependant être considérés comme un traitement exhaustif. Le lecteur peut consulter le livre de J. Faraut, dans la même collection, pour un exposé plus complet. Le chapitre III introduit les premiers aspects des probabilités avec les notions de variables aléatoires et de leurs lois, illustrées par de nombreux exemples. Les fonctions caractéristiques (transformées de Fourier) y sont également étudiées. Le chapitre IV fait réellement entrer le lecteur dans les considérations probabilistes avec le concept d'indépendance. L'addition des variables aléatoires indépendantes y est interprétée comme la traduction fonctionnelle, à la riche intuition, du produit de convolution des mesures. Au chapitre V sont présentées les diverses notions de convergence de suites de variables aléatoires, convergence presque sûre, en probabilité, en loi. La loi des grands nombres et le théorème central limite constituent les exemples fondamentaux de ces divers modes de convergence. Le chapitre suivant est un exposé des notions de conditionnement (probabilités, espérances, lois), illustré par le modèle gaussien. Le chapitre VII est une brève introduction à la notion de martingale à temps discret où sont notamment établis le théorème d'arrêt et les théorèmes de convergence des martingales. Enfin, le dernier chapitre traite succintement de chaînes de Markov (mesures invariantes, convergences). Un appendice présentant les lois de probabilités usuelles avec leurs caractéristiques principales complète la rédaction.

Ce livre est destiné à des étudiants de 3$^{\mathrm{e}}$ année de licence de mathématiques ayant suivi un cours de base de mesure et intégration, dont les éléments fondamentaux sont toutefois rappelés dans les deux premiers chapitres. Il ne suppose pas une connaissance préalable des notions de probabilités enseignées d'ordinaire dans les deux premières années de licence et habituellement axés sur les probabilités discrètes et les problèmes de combinatoire dont il n'est fait que très peu état dans cet ouvrage. Ce livre peut être utilisé comme support d'un cours de probabilité de L3, ou d'un premier semestre de master. Cet ouvrage contient en outre les prérequis nécessaires à l'épreuve écrite de mathématiques générales pour l'agrégation ainsi que pour les leçons spécialisées. Chaque chapitre est complété par une série d'exercices destinés à approfondir et à illustrer les éléments de la théorie venant d'être introduits.

Ce livre n'est pas la contribution des seuls auteurs, mais reflète en partie aussi l'enseignement des probabilités par l'équipe du laboratoire de statistique et probabilités de l'université Paul-Sabatier de Toulouse au cours de ces dernières années. Nous remercions ainsi D. Bakry, M. Benaïm, Ph. Carmona, L. Coutin, J.-L. Dunau, G. Letac, D. Michel et tous les membres du laboratoire pour nous avoir permis de puiser librement dans leurs notes de cours et leurs réserves d'exercices, et pour nous avoir conseillé et relu à divers moments de la préparation. Nous remercions tout particulièrement D. Michel et X. Milhaud pour avoir suppléé le chapitre VIII sur les chaînes de Markov, ainsi que pour leur soutien et leur aide. P. Lezaud a relu avec un soin extrême tout le manuscrit et a testé la plupart des exercices. Qu'il soit sincèrement remercié pour cette tâche bien ingrate. Un dernier mot enfin. Le temps passé à la rédaction de ce livre est très certainement insuffisant pour que cet ouvrage puisse prétendre à beaucoup d'originalité et pour que le résultat soit à la hauteur des espérances et de l'enthousiasme des premières lignes. Il ne saurait être aussi exempt d'imperfections et d'erreurs pour lesquels nous nous excusons par avance.

Un chapitre est numéroté par un chiffre romain, et une section de chapitre par un chiffre arabe. Un énoncé dans une section est désigné par le numéro de la section et le numéro d'ordre de cet énoncé dans la section. Ainsi, II.3.4 désigne l'énoncé 4 dans la section 3 du chapitre II.

Toulouse, septembre 1998 — Ph. Barbe, M. Ledoux

Préface à la seconde édition

Nous remercions les éditions EDP Sciences, ainsi que l'éditeur scientifique de la collection, D. Guin, de nous proposer de publier une nouvelle édition de notre ouvrage paru en 1998.

Le texte est pour l'essentiel identique à la version intiale. Celle-ci comporte un nombre trop important d'erreurs, mineures ou plus sérieuses, qui nuisent beaucoup à sa lisibilité. Nous avons essayé de corriger les principales erreurs et imperfections (sans toutefois pouvoir prétendre les avoir éliminées toutes). Plusieurs corrections nous ont été aimablement communiquées par divers collègues. Nous remercions tout particulièrement R. Ben David pour ses corrections et commentaires très minutieux (même si nous ne les avons pas tous suivis). Nous remercions aussi M. Arnaudon, Fr. Barthe, M. Benaïm, B. Bercu, Ph. Carmona, H. Carrieu, R. Chomienne, S. Cohen, Th. Delmotte, Th. Gallay, Ch. Leuridan, P. Lezaud et D. Robert.

H. Carrieu prépare actuellement un fascicule des exercices corrigés de ce livre. Nous le remercions bien vivement pour cet excellent complément.

Paris, Toulouse, septembre 2006 — Ph. Barbe, M. Ledoux

I

THÉORIE DE LA MESURE

L'objet de ce chapitre est de rappeler les éléments de théorie de la mesure qui seront indispensables au développement du calcul des probabilités dans les chapitres suivants. Une mesure abstraite sur un ensemble Ω généralise la notion de longueur, d'aire ou de volume, sur la droite, le plan ou l'espace. Intuitivement, le lien avec les probabilités est qu'une probabilité mesure la vraisemblance d'un événement.

Sur la droite (ou le plan, ou l'espace), la longueur (ou l'aire, ou le volume) est une fonction qui à un ensemble associe un nombre réel positif. Cette fonction est additive, au sens où appliquée à $A \cup B$, elle est la somme de la fonction appliquée en A et de la fonction appliquée en B, pourvu que A et B soient disjoints. On demandera à une mesure abstraite de vérifier cette additivité.

Un fait peu intuitif est qu'il existe des sous-ensembles de la droite (ou du plan, ou de l'espace) pour lesquels on ne peut pas définir leur longueur (ou aire, ou volume) (*cf.* exercice I.6). Il convient donc, dans un premier temps, de définir la classe d'ensembles que l'on veut (et peut) mesurer. Compte tenu de la propriété d'additivité décrite au paragraphe précédent, on imposera par exemple que cette classe soit stable par réunion finie.

I.1. Algèbre, tribu

Soit Ω un ensemble.

Exemples I.1.1. (i) Ω pourra être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$, un espace métrique, ou plus généralement topologique.

(ii) On joue au dé en le lançant une fois. L'ensemble Ω peut être pris comme l'ensemble des faces du dé, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Lorsque l'on lance le dé au hasard, cela revient à choisir (« au hasard ») un élément de Ω.

Il convient de remarquer que l'on peut toujours ajouter des points à Ω. Dans l'exemple I.1.1.ii nous pourrions tout aussi bien prendre $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Mais intuitivement, 7 a une probabilité nulle d'être réalisé.

On considère $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Un sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est un ensemble de parties de Ω.

Définition I.1.2. Un sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une algèbre (de Boole) sur Ω si

(i) $\Omega \in \mathcal{C}$,

(ii) $\mathcal{C}$ est stable par passage au complémentaire (*i.e.* $A \in \mathcal{C} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{C}$),

(iii) $\mathcal{C}$ est stable par réunion finie (*i.e.* $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{C} \Rightarrow A_1 \cup \cdots \cup A_k \in \mathcal{C}$).

Dans l'axiome (iii) de la définition I.1.2, on pourrait se contenter de $k = 2$, le cas général s'en déduisant par récurrence. Par passage au complémentaire, une algèbre est aussi stable par intersection finie.

Définition I.1.3. Un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω si

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(ii) $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire (*i.e.* $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$),

(iii) $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable (*i.e.* $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$).

On dit aussi que $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre. Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ formé d'un ensemble Ω et d'une tribu $\mathcal{A}$ sera appelé un espace mesurable. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés ensembles mesurables.

Toute tribu est une algèbre.

Expliquons le sens de ces deux définitions. Tout d'abord le « σ » de σ-algèbre est un acronyme de « dénombrable » par référence à l'axiome (iii) dans la définition d'une tribu.

Exemples I.1.4. (i) $\mathcal{P}(\Omega)$ est toujours une algèbre et une tribu.

(ii) Le sous-ensemble $\{\emptyset, \Omega\}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$, composé de la partie vide et de Ω, est une algèbre et une tribu, appelée algèbre ou tribu triviale.

(iii) L'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^d$ n'est pas une algèbre (et donc n'est pas une tribu) car le complémentaire d'un ouvert n'est pas nécessairement ouvert.

(iv) Une réunion de deux algèbres n'est pas une algèbre en général. Considérer par exemple $\Omega = \{0, 1, 2\}$, les algèbres $\mathcal{C}_1 = \{\emptyset, \{0, 1, 2\}, \{0\}, \{1, 2\}\}$ et $\mathcal{C}_2 = \{\emptyset, \{0, 1, 2\}, \{1\}, \{0, 2\}\}$, puis remarquer que la réunion de $\{0\}$ et $\{1\}$ n'appartient pas à $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.

(v) Une intersection d'un nombre quelconque d'algèbres (resp. de tribus) est une algèbre (resp. une tribu).

Certains auteurs définissent les algèbres comme étant stables par réunion et intersection finies.

En général, il est difficile d'expliciter tous les éléments d'une tribu. Les algèbres et les tribus se décrivent le plus souvent par leurs éléments générateurs.

Définition I.1.5. Soit $\mathcal{E}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$.

(i) L'algèbre $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ engendrée par $\mathcal{E}$ est l'intersection de toutes les algèbres contenant $\mathcal{E}$.

(ii) La tribu $\sigma(\mathcal{E})$ engendrée par $\mathcal{E}$ est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{E}$.

Compte tenu de la définition I.1.5, on peut parler de la tribu engendrée par deux tribus $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, que l'on note $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$ ou aussi $\sigma(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$, ou encore $\sigma(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$. On prendra bien soin de remarquer, d'après l'exemple I.1.4.iv, que $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$ est en général différent de $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.

Exemples I.1.6. (i) Soit A une partie de Ω. L'algèbre $\mathcal{C}(\{A\})$ et la tribu $\sigma(\{A\})$ sont $\{\emptyset, \Omega, A, A^{\mathrm{c}}\}$.

(ii) Plus généralement, si $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ est une partition finie de Ω, c'est-à-dire $\Omega = \bigcup_{1 \leq i \leq n} S_i$ et $S_i \cap S_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, alors

$$\mathcal{C}(\mathcal{S}) = \Big\{ \bigcup_{i \in T} S_i \, : \, T \subset \{1, \ldots, n\} \Big\},$$

où T parcourt l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, n\}$, l'ensemble vide compris. En particulier, $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ est en bijection avec l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, n\}$ et se compose de 2^n éléments.

(iii) Si $\mathcal{S} = \{S_i \, : \, i \in \mathbb{N}\}$ est une partition de Ω, alors

$$\sigma(\mathcal{S}) = \Big\{ \bigcup_{i \in T} S_i \, : \, T \subset \mathbb{N} \Big\}.$$

Définition I.1.7. Si Ω est un espace topologique, on appelle tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(\Omega)$, la tribu engendrée par les ouverts de Ω. Un borélien est un ensemble appartenant à la tribu borélienne.

La tribu borélienne est aussi engendrée par les fermés puisque la tribu est stable par passage au complémentaire.

Exemple I.1.8. Sur $\mathbb{R}$, la tribu borélienne coïncide avec la tribu engendrée par les intervalles $]\,a,b\,[$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Elle coïncide aussi avec la tribu engendrée par les intervalles $[\,a,b\,]$, ou $]\,a,b\,]$, ou $[\,a,b\,[$.

On prendra bien soin de constater que si les éléments d'une famille génératrice sont explicites, il n'en est rien en général des éléments de la tribu (la plupart des boréliens de $\mathbb{R}$ ne sont pas des intervalles !).

Dans la suite, lorsque Ω est $\mathbb{R}^d$ (ou un espace topologique), il sera toujours muni de sa tribu borélienne. Si Ω est discret, on le munira de la tribu de ses parties.

Lorsque l'on a deux ensembles Ω_1 et Ω_2, on définit leur produit $\Omega_1 \times \Omega_2$, sur lequel on peut éventuellement définir des structures produits (topologie produit, groupe produit, etc). Lorsque l'on a des espaces mesurables $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$, on souhaite faire de l'espace produit $\Omega_1 \times \Omega_2$ un espace mesurable.

Définition I.1.9. Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$, deux espaces mesurables. On appelle ensemble élémentaire de $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ une réunion finie de pavés $A_1 \times A_2$, avec $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$. La tribu produit $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ sur Ω est la tribu engendrée par les ensembles élémentaires.

Exemples I.1.10. (i) Les ensembles élémentaires forment une algèbre.

(ii) En utilisant le fait que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire comme une réunion dénombrable de pavés d'intervalles ouverts, on montre que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On montre de même que la tribu sur $\mathbb{R}^d$ engendrée par d copies de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

De façon générale, en mathématique, lorsqu'une structure est définie sur un espace, on souhaite pouvoir la transporter sur d'autres espaces par des fonctions. En général, on utilise d'ailleurs les images réciproques par les fonctions. Par exemple, sur $\mathbb{R}$, la structure d'ordre est préservée par la réciproque d'une application croissante (*i.e.* si $x < y$ sont dans l'image de $\mathbb{R}$ par une fonction f croissante, alors

$f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$). De même, la structure topologique est préservée par application de la réciproque d'une application continue (*i.e.* f est continue si $f^{-1}(U)$ est ouvert pour tout ouvert U). La notion analogue dans le contexte de la théorie de la mesure est celle de mesurabilité.

Si f est une application de Ω dans E et si B est une partie de E, on notera

$$f^{-1}(B) = \{\, \omega \in \Omega : f(\omega) \in B \,\}.$$

Si $\mathcal{B}$ est une famille de parties de E, on notera

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \{\, f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B} \,\}.$$

Noter que si $\mathcal{B}$ est une algèbre (resp. tribu), $f^{-1}(\mathcal{B})$ est une algèbre (resp. tribu) d'après les propriétés de l'image réciproque ensembliste f^{-1}.

Définition I.1.11. (i) Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(E, \mathcal{B})$, deux espaces mesurables. Soit f une fonction de Ω dans E. On dit que f est mesurable (pour $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) si $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$; c'est-à-dire, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{B}$.

(ii) Si f est une fonction de Ω dans $(E, \mathcal{B})$, on appelle tribu engendrée par f, notée $\sigma(f)$, la plus petite tribu (sur Ω) qui rend f mesurable ; autrement dit, $\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{B})$.

(iii) Plus généralement, si $\mathcal{F}$ est une famille de fonctions d'un ensemble Ω à valeurs dans $(E, \mathcal{B})$, on appelle tribu engendrée par $\mathcal{F}$ la plus petite tribu (sur Ω) qui rend mesurable toute fonction de $\mathcal{F}$ (*i.e.* la tribu engendrée par les ensembles de la forme $f^{-1}(B)$ pour $B \in \mathcal{B}$ et $f \in \mathcal{F}$). On la note $\sigma(\mathcal{F})$.

Avec les notations de cette définition, dire que f est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(E, \mathcal{B})$ revient à dire que $\sigma(f) \subset \mathcal{A}$.

Exemples I.1.12. (i) Si A est une partie de Ω, on définit la fonction indicatrice de A par $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$ si $\omega \notin A$. Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. En tant que fonction à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, la fonction $\mathbb{1}_A$ est mesurable pour $\mathcal{A}$ si et seulement si $A \in \mathcal{A}$.

(ii) Soit $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et soit Π_1 la projection de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sur sa première composante $\mathbb{R}$ définie par $\Pi_1(x, y) = x$. La tribu engendrée par Π_1 est formée des ensembles $B \times \mathbb{R}$ où B décrit les boréliens de $\mathbb{R}$. Cette tribu est différente de la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$. On notera que Π_1 est mesurable de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ bien que $\sigma(\Pi_1)$ ne coïncide pas avec la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$.

(iii) La tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$ est engendrée par les projections Π_1 et Π_2 sur les coordonnées. En effet, $\Pi_1^{-1}(A) \cap \Pi_2^{-1}(B) = (A \times \Omega) \cap (\Omega \times B) = A \times B$, et les rectangles engendrent la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (*cf.* I.1.9 et I.1.10).

Définition I.1.13. Une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans un espace topologique muni de sa tribu borélienne $(E, \mathcal{B}(E))$ est dite borélienne.

Puisque nous munirons toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ de sa tribu borélienne, les fonctions mesurables à valeurs réelles sont boréliennes.

En pratique les tribus étant le plus souvent définies par une partie génératrice, la définition I.1.11 est difficile à vérifier. La proposition suivante montre que pour qu'une fonction soit mesurable, il suffit de vérifier sa propriété caractéristique sur une famille génératrice de la tribu d'arrivée.

Proposition I.1.14. *Soient Ω et E deux ensembles. Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$ et soit $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$. La tribu engendrée par une fonction f de Ω dans $(E, \mathcal{B})$ est $\sigma(f) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) = \sigma(\{ f^{-1}(C) : C \in \mathcal{E} \})$.*

Plus généralement, si $\mathcal{F}$ est une famille de fonctions de Ω dans $(E, \mathcal{B})$, alors $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\{ f^{-1}(C) : C \in \mathcal{E} \,;\, f \in \mathcal{F} \})$.

En particulier, pour qu'une fonction f de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(E, \sigma(\mathcal{E}))$ soit mesurable, il suffit que $f^{-1}(\mathcal{E})$ soit inclus dans $\mathcal{A}$.

Démonstration. Soit

$$\mathcal{T} = \Big\{ B \subset E : f^{-1}(B) \in \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{E})\big) \Big\} .$$

Il est aisé de vérifier que $\mathcal{T}$ est une tribu qui contient $\mathcal{E}$. Donc $\mathcal{T}$ contient $\sigma(\mathcal{E})$. Soit à présent $A \in \sigma(f)$. Par définition, $A = f^{-1}(B)$ pour un certain $B \in \sigma(\mathcal{E})$. Il s'ensuit $B \in \mathcal{T}$ et par construction de $\mathcal{T}$, $A = f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$. Ainsi, $\sigma(f) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$. L'inclusion réciproque est évidente.

Le cas d'une famille quelconque se traite de la même façon.

Enfin, si $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$, alors $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \subset \mathcal{A}$. Comme $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) = \sigma(f)$ par le premier point, la conclusion s'ensuit. $\square$

I.2. Ensembles de fonctions mesurables

Nous rassemblons ici quelques faits sur les fonctions mesurables, montrant que c'est une classe assez naturelle de fonctions.

Proposition I.2.1. *La composée de deux fonctions mesurables est mesurable.*

Démonstration. Soient $f_i : (\Omega_i, \mathcal{A}_i) \to (\Omega_{i+1}, \mathcal{A}_{i+1})$, $i = 1, 2$, mesurables. Soit $A \in \mathcal{A}_3$. On a $(f_1 \circ f_2)^{-1}(A) = f^{-1}(f_2^{-1}(A))$. Puisque f_2 est mesurable, $f_2^{-1}(A) \in \mathcal{A}_2$, et puisque f_1 est mesurable, $f_1^{-1}(f_2^{-1}(A)) \in \mathcal{A}_1$. □

Lemme I.2.2. *Si f, g sont des fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, alors $\omega \in \Omega \mapsto (f(\omega), g(\omega)) \in \mathbb{R}^2$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$.*

Démonstration. Soit $A \times B$ un rectangle dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, et $h(\omega) = (f(\omega), g(\omega))$. Alors, $h^{-1}(A \times B) = f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Puisque les rectangles engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, on conclut grâce à la proposition I.1.14. □

Les fonctions mesurables par rapport à une tribu borélienne forment une classe plus vaste que les fonctions continues :

Proposition I.2.3. *Soient Ω_1, Ω_2 deux espaces topologiques munis de leur tribu borélienne. Toute fonction continue de Ω_1 dans Ω_2 est mesurable (ou borélienne ici).*

Démonstration. Remarquer que si U est ouvert dans Ω_2 et f est une fonction continue, $f^{-1}(U)$ est ouvert. Puis appliquer la proposition I.1.14. □

Si x et y sont deux nombres réels, on note $x \vee y$ leur maximum.

Corollaire I.2.4. *L'espace des fonctions mesurables (boréliennes) de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est stable pour les opérations de multiplication par une constante $(\lambda f)(\omega) = \lambda f(\omega)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, d'addition $(f + g)(\omega) = f(\omega) + g(\omega)$, de multiplication $(fg)(\omega) = f(\omega)g(\omega)$, et du maximum $(f \vee g)(\omega) = f(\omega) \vee g(\omega)$*

Démonstration. La fonction $\omega \mapsto \lambda f(\omega)$ est la composée de la fonction mesurable f et de la fonction continue $x \mapsto \lambda x$. De même $f + g$ (resp. fg, resp. $f \vee g$) est la composée de la fonction mesurable $\omega \mapsto (f(\omega), g(\omega))$ (en vertu du lemme I.2.2), et de la fonction continue $(x, y) \mapsto x + y$ (resp. $(x, y) \mapsto xy$, resp. $(x, y) \mapsto x \vee y$). □

Il est facile de voir qu'une limite ponctuelle de fonctions croissantes est croissante, mais qu'une limite ponctuelle de fonctions continues n'est pas nécessairement continue. La classe des fonctions mesurables est stable par limite simple.

Théorème I.2.5. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables de* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dans un espace métrique* (E, d) *muni de sa tribu borélienne. Si* f_n *converge ponctuellement vers* f *(i.e. pour tout* $\omega \in \Omega$, $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$*), alors* f *est mesurable.*

Démonstration. D'après la proposition I.1.14, il suffit de montrer que si U est ouvert dans E, alors $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$. Posons $U_r = \{\, x \in U \ : \ d(x, E \setminus U) > 1/r \,\}$, $r \geq 1$ entier. L'ensemble U_r est ouvert, donc est un borélien de E. Ainsi,

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{r,m} \bigcap_{n\geq m} f_n^{-1}(U_r)$$

est un borélien. □

On peut approcher toute fonction mesurable par des fonctions mesurables plus simples.

Définition I.2.6. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On appelle fonction étagée (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$) une fonction de la forme $f(\omega) = \sum_{1\leq i\leq k} a_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega)$ où les A_i sont des éléments disjoints de $\mathcal{A}$, et où les coefficients a_i appartiennent à $\mathbb{R}^d$.

Proposition I.2.7. *Toute fonction* f *mesurable de* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *est limite simple de fonctions étagées. Si* f *est positive, la limite peut être choisie croissante.*

Démonstration. Prenons d'abord f positive. Définissons pour $n, k \geq 1$,

$$A_{n,k} = \left\{ \omega \ : \ \frac{k-1}{2^n} \leq f(\omega) < \frac{k}{2^n} \right\}.$$

Les $A_{n,k}$ sont éléments de $\mathcal{A}$ en tant qu'images réciproques par la fonction mesurable f d'intervalles. La suite

$$f_n(\omega) = \sum_{1\leq k\leq 2^{n^2}} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{1}_{A_{n,k}}(\omega)$$

converge en croissant vers f.

Si f est quelconque, écrivons $f = f^+ - f^-$ avec $f^+ = f \vee 0$ et $f^- = (-f) \vee 0$, et approximons les fonctions positives f^+ et f^- par la méthode précédente. □