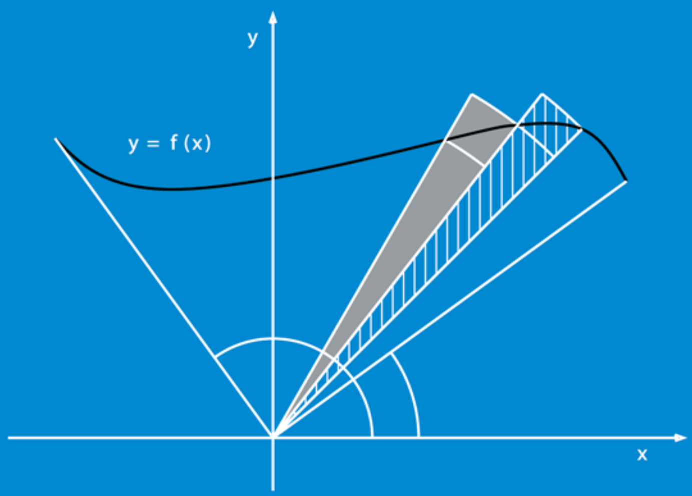
COLLECTION ENSEIGNEMENT SUP //// Mathématiques

L3M1

Problèmes d'analyse III

INTÉGRATION

EXERCICES CORRIGÉS



Wieslawa J. Kaczor et Maria T. Nowak

Traduction : Eric Kouris

EDP SCIENCES

PROBLÈMES D'ANALYSE III
Intégration

Wieslawa J. Kaczor, Maria T. Nowak
Traduction : Eric Kouris

Collection dirigée par Daniel Guin

EDP SCIENCES
17, avenue du Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

This work was originally published in English by the American Mathematical Society under the title "*Problems in Mathematical Analysis III: Integration*", © 2003 American Mathematical Society. The present translation was created for EDP Sciences under authority of the American Mathematical Society and is published by permission.

Imprimé en France

ISBN : 978-2-7598-0087-2

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE DU TRADUCTEUR

Ce livre est le troisième et dernier d'une série de trois recueils d'exercices corrigés traitant des bases de l'analyse réelle. Il s'adresse d'abord aux étudiants, principalement ceux des niveaux L3 et M1, mais les étudiants des niveaux L1 et L2 tireront un grand profit de l'étude du premier chapitre et de la dernière section du second chapitre. Il intéressera aussi les candidats aux concours du CAPES et de l'agrégation de mathématiques qui y trouveront autant les théorèmes qu'ils doivent connaître que des exercices pour les illustrer.

Ce troisième volume traite de l'intégration des fonctions réelles. Le premier chapitre aborde l'intégrale de Riemann et de Riemann-Stieltjes (la dernière section applique ce qui précède aux calculs de volumes, d'aires et de longueurs), le second chapitre s'intéresse à l'intégrale de Lebesgue (la quatrième section porte sur la continuité absolue et la continuité approximative et la dernière section sur les séries Fourier). Chaque section, centrée sur un thème, commence par des exercices relativement simples et se poursuit par des problèmes plus difficiles, certains étant des théorèmes classiques.

Tous les exercices sont corrigés, le plus souvent en détail, ce qui permettra aux étudiants de ne pas « sécher » sur un exercice difficile. Nous les invitons cependant à chercher par eux-mêmes les exercices avant de regarder les solutions et nous insistons aussi sur le fait que les auteurs ne donnent pas nécessairement toutes les étapes d'un calcul lorsqu'ils considèrent que celui-ci ne pose pas de problèmes techniques. C'est bien sur aux étudiants de prendre le temps de rédiger entièrement leurs solutions.

Nous avons ajouter en note les noms de certaines propriétés et relations pour inviter les étudiants à engager des recherches par eux-mêmes. L'index à la fin de l'ouvrage permet de facilement retrouver une définition et la table des renvois permet de voir les liens entre les différents problèmes dans ce volume et dans les deux autres.

Je tiens à remercier Daniel Guin et Xavier Cottrell pour avoir pris le temps de relire cette traduction et pour les remarques qu'ils m'ont faites afin d'améliorer le style et de corriger les erreurs. Je reste responsable de celles qui subsisteraient. Je souhaite aussi remercier pour sa disponibilité Patrick Fradin, l'auteur du logiciel TeXgraph avec lequel toutes les figures de cet ouvrage et l'illustration de la couverture ont été réalisées.

É. Kouris

PRÉFACE À L'ÉDITION ANGLAISE

Cet ouvrage fait suite aux *Problèmes d'Analyse I* et *II*. Il s'intéresse à l'intégrale de Riemann-Stieltjes et à l'intégrale de Lebesgue des fonctions réelles d'une variable réelle. Ce volume est organisé de façon semblable aux deux premiers. Chaque chapitre est divisé en deux parties : les problèmes et leurs solutions. Chaque section commence par un certain nombre de problèmes de difficulté modérée, certains étant en fait des théorèmes. Il ne s'agit donc pas d'un recueil typique d'exercices mais plutôt d'un complément à des ouvrages d'analyse pour la licence. Nous espérons que ce livre intéressera les étudiants de licence, les enseignants et les chercheurs en analyse et ses applications. Nous espérons aussi qu'il sera utile aux personnes travaillant seules.

Le premier chapitre est consacré aux intégrales de Riemann et de Riemann-Stieltjes. La section I.1 traite de l'intégrale de Riemann-Stieltjes par rapport à des fonctions monotones ; la section I.3 étudie l'intégration par rapport à des fonctions à variation bornée. Nous rassemblons à la section I.6 des inégalités plus ou moins connues portant sur les intégrales. On y trouvera entre autres l'inégalité d'Opial et l'inégalité de Steffensen. Ce chapitre se termine par une section intitulée « Mesure de Jordan ». La mesure de Jordan, appelée aussi « contenu » par certains auteurs, n'est pas une mesure dans le sens usuel car elle n'est pas dénombrablement additive. Elle est cependant très liée à l'intégrale de Riemann et nous espérons que cette section donnera à l'étudiant une compréhension plus profonde des idées sous-tendant les calculs.

Le chapitre II traite de la mesure et de l'intégration de Lebesgue. La section II.3 présente de nombreux problèmes liés aux théorèmes de convergence qui permettent de permuter limite et intégrale. On y considère aussi les espaces L^p sur des intervalles bornés. On discute à la section suivante de la continuité absolue et des relations entre intégration et dérivation. On donne une démonstration du théorème de Banach et Zarecki affirmant qu'une fonction f est absolument continue sur un intervalle borné $[a, b]$ si et seulement si elle est continue, à variation bornée sur $[a, b]$ et transforme les ensembles de mesure nulle en des ensembles de mesure nulle. De plus, on introduit le concept de continuité approximative. On notera ici qu'il existe une analogie entre deux relations : d'une part la relation entre intégrabilité au sens de Riemann et continuité, d'autre part la relation entre intégrabilité au sens de Lebesgue et continuité approximative. Précisément, une fonction bornée sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable si et seulement si elle est presque partout continue ; de même, une fonction bornée sur $[a, b]$ est mesurable et donc Lebesgue-intégrable si et seulement si elle est presque partout approximativement continue. La dernière section est consacrée aux séries de Fourier. Étant donné l'existence d'une abondante littérature sur ce sujet, par exemple le livre de A. Zygmund, *Trigonometric Series*, celui de N.K. Bari, *A Treatise on Trigonometric Series* et celui de R.E. Edwards, *Fourier Series*, il a été difficile de choisir quel matériel inclure dans un livre s'adressant principalement à des étudiants de licence. En conséquence, nous nous sommes concentrés sur les coefficients de Fourier de fonctions de différentes classes et sur les théorèmes élémentaires portant sur la convergence des séries de Fourier.

Toutes les notations et définitions utilisées dans ce volume sont standards. On peut les trouver dans les ouvrages [28] et [29] qui donnent aussi aux lecteurs les connaissances théoriques suffisantes. Cependant, pour éviter toute ambiguïté et pour que l'ouvrage ne nécessite pas le recours à des références extérieures, nous démarrons presque chaque section par un paragraphe d'introduction présentant les premières définitions et les théorèmes utilisés dans cette section. Nos conventions pour les renvois s'expliquent le mieux par des exemples : I.2.13, I.2.13 (vol. I) et I.2.13 (vol. II) représentent respectivement le numéro du problème dans ce volume, dans le volume I et dans le volume II. On utilise aussi les notations et la terminologie données dans les deux premiers volumes.

Nous avons emprunté de nombreux problèmes aux sections de problèmes de journaux tels que l'*American Mathematical Monthly* ou le *Mathematics Today* (en russe) et de différents livres de cours et recueils d'exercices ; de tout ceci, seuls les livres sont cités dans la bibliographie. On aimerait ajouter que de nombreux problèmes de la section I.5 proviennent du livre de Fikhtengol'ts ([11]) et que la section I.7 a été influencée par le livre de Rogosinski ([27]). Il allait malheureusement au-delà de nos objectifs de repérer les sources originales et nous présentons nos sincères excuses si nous sommes passés à côté de certaines contributions.

Nous voudrions, pour finir, remercier plusieurs personnes du département de mathématiques de l'université Maria Curie-Skłodowska auprès desquelles nous sommes redevables. Une mention toute particulière va à Tadeusz Kuczumow et à Witold Rzymowski pour leurs suggestions sur de nombreux problèmes et solutions et à Stanisław Prus pour ses conseils et son soutien sur TEX. Notre gratitude va à Richard J. Libera de l'université du Delaware, pour son aide généreuse en anglais et sur la présentation du matériel. Nous sommes très reconnaissants envers Jadwiga Zygmunt de l'université Catholique de Lublin qui a tracé toutes les figures et nous a aidé à les incorporer dans le texte. Nous remercions nos étudiants qui nous ont aidés dans le long et ennuyeux travail de relecture. Des remerciements particuliers vont à Paweł Sobolewski et Przemysław Widelski qui ont lu le manuscrit avec beaucoup de soin et d'attention et ont apporté nombre de suggestions utiles. Sans leur aide, des erreurs, et pas seulement typographiques, seraient passées inaperçues. Nous acceptons cependant l'entière responsabilité pour les erreurs qui subsistent. Nous aimerions aussi saisir cette opportunité pour remercier l'équipe de l'AMS pour sa longue coopération, sa patience et ses encouragements.

W. J. Kaczor, M. T. Nowak

This page intentionally left blank

NOTATIONS ET TERMINOLOGIE

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des nombres réels positifs.
- $\overline{\mathbb{R}}$ est la droite réelle achevée, autrement dit, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs.
- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- $[a, b]$ est l'intervalle fermé d'extrémités a et b.
- $]a, b[$ est l'intervalle ouvert d'extrémités a et b.
- $[x]$ est la partie entière du nombre réel x (on a conservé la notation anglophone).
- Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{pour } x > 0, \\ -1 & \text{pour } x < 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$, on pose aussi $0! = 1$,

  $(2n)!! = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n-2) \times 2n$,

  $(2n-1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3) \times (2n-1)$.

- Si $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ est non vide et majoré, $\sup \mathbf{A}$ est alors le plus petit majorant de $\mathbf{A}$. Si l'ensemble non vide $\mathbf{A}$ n'est pas majoré, on pose alors $\sup \mathbf{A} = +\infty$.

- Si $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ est non vide et minoré, $\inf \mathbf{A}$ est alors le plus grand minorant de $\mathbf{A}$. Si l'ensemble non vide $\mathbf{A}$ n'est pas minoré, on pose alors $\inf \mathbf{A} = -\infty$.

- Une suite $\{a_n\}$ est dite croissante (resp. décroissante) si $a_{n+1} \geqslant a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (resp. $a_{n+1} \leqslant a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). La classe des suites monotones est formée des suites croissantes et des suites décroissantes.

- Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites réelles ($b_n \neq 0$ pour tout n). Si le quotient a_n/b_n tend vers 0 (resp. reste borné) lorsque n tend vers $+\infty$, on écrit alors $a_n = o(b_n)$ (resp. $a_n = O(b_n)$).

- Un réel c est une valeur d'adhérence de la suite $\{a_n\}$ s'il existe une sous-suite $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$ qui converge vers c.

- Soit $\mathbf{S}$ l'ensemble de toutes les valeurs d'adhérence de $\{a_n\}$. La limite inférieure, $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n$, et la limite supérieure, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n$, sont définies comme suit :
$$\varlimsup_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ n'est pas majorée,} \\ -\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ est majorée et } \mathbf{S} = \varnothing, \\ \sup \mathbf{S} & \text{si } \{a_n\} \text{ est majorée et } \mathbf{S} \neq \varnothing, \end{cases}$$
$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} -\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ n'est pas minorée,} \\ +\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ est minorée et } \mathbf{S} = \varnothing, \\ \inf \mathbf{S} & \text{si } \{a_n\} \text{ est minorée et } \mathbf{S} \neq \varnothing. \end{cases}$$

- Un produit infini $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ est dit convergent s'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$ pour $n \geqslant n_0$ et la suite $\{a_{n_0} a_{n_0+1} \cdot \dots \cdot a_{n_0+n}\}$ converge, lorsque n tend vers $+\infty$, vers une limite P_0 non nulle. Le nombre $P = a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{n_0-1} \cdot P_0$ est appelée la valeur du produit infini.

- Si $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ et si f est une fonction définie sur $\mathbf{X}$, $f_{|\mathbf{A}}$ est la restriction de f à $\mathbf{A}$.

- $$\chi_{\mathbf{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbf{A}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{A} \end{cases}$$
  est la *fonction caractéristique* de $\mathbf{A}$.

- On note $f_n \underset{\mathbf{A}}{\to} f$ pour $\{f_n\}$ converge uniformément vers f sur $\mathbf{A}$.

Si $(\mathbf{X}, d)$ est un **espace métrique**, $x \in \mathbf{X}$ et $\mathbf{A}$ un sous-ensemble non vide de $\mathbf{X}$, alors

- $\mathbf{A}^c = \mathbf{X} \setminus \mathbf{A}$ est le complémentaire de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{X}$,
- $\mathbf{B}_{\mathbf{X}}(x, r)$, $\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{X}}(x, r)$ représentent respectivement la boule ouverte et la boule fermée de centre x et de rayon r ; si $\mathbf{X}$ est fixé, on omet l'indice et on écrit simplement $\mathbf{B}(x, r)$, $\overline{\mathbf{B}}(x, r)$,
- $\mathring{\mathbf{A}}$ est l'intérieur de $\mathbf{A}$ dans l'espace métrique $(\mathbf{X}, d)$,
- $\overline{\mathbf{A}}$ est l'adhérence de $\mathbf{A}$ dans l'espace métrique,
- $\partial\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{X} \setminus \mathbf{A}}$ est la frontière de $\mathbf{A}$,
- $\operatorname{diam}(\mathbf{A}) = \sup\{d(x, y) : x, y \in \mathbf{A}\}$ est le diamètre de l'ensemble $\mathbf{A}$,
- $\operatorname{dist}(x, \mathbf{A}) = \inf\{d(x, y) : y \in \mathbf{A}\}$ est la distance de x à l'ensemble $\mathbf{A}$,
- $\mathbf{A}$ est un *ensemble de type* $\mathcal{F}_\sigma$ si c'est une union dénombrable d'ensembles fermés dans $(\mathbf{X}, d)$,
- $\mathbf{A}$ est un *ensemble de type* $\mathcal{G}_\delta$ si c'est une intersection dénombrable d'ensembles ouverts dans $(\mathbf{X}, d)$,
- $\mathbf{X}$ est connexe s'il n'existe pas de sous-ensembles ouverts disjoints $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ de $\mathbf{X}$ tels que $\mathbf{X} = \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$.

Continuité, **dérivabilité**.

- $\mathscr{C}_{\mathbf{A}}$ est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{A}$.
- $\mathscr{C}^n_{]a,b[}$ est l'ensemble des fonctions n fois continûment dérivables sur $]a, b[$.
- $\mathscr{C}^1_{[a,b]}$ est l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur $[a, b]$, en considérant aux extrémités respectivement la dérivée à droite et la dérivée à gauche. L'ensemble $\mathscr{C}^n_{[a,b]}$ des fonctions n fois continûment dérivables sur $[a, b]$ est défini récursivement.
- $\mathscr{C}^\infty_{]a,b[}$ (resp. $\mathscr{C}^\infty_{[a,b]}$) est l'ensemble des fonctions infiniment dérivables sur $]a, b[$ (resp. $[a, b]$).

Si f et g sont des fonctions réelles d'une variable réelle, alors

- $f(a^+)$ et $f(a^-)$ représentent respectivement la limite à droite et la limite à gauche de f en a,
- si le quotient $f(x)/g(x)$ tend vers 0 (resp. reste borné) lorsque x tend vers x_0, on écrit alors $f(x) = o\,(g(x))$ (resp. $f(x) = O\,(g(x))$),
- $f^{(n)}$ est la dérivée n-ième de f,
- $f'_+(a)$ et $f'_-(a)$ représentent respectivement la dérivée à droite et la dérivée à gauche de f en a.

I

L'INTÉGRALE DE RIEMANN-STIELTJES

Énoncés

I.1. Propriétés de l'intégrale de Riemann-Stieltjes

Nous commençons par quelques notations, définitions et théorèmes. Nous entendons par une *partition* P d'un intervalle fermé $[a\,,b]$ un ensemble fini de points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tels que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Le réel $\mu(P) = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, 2, \ldots, n\}$ est appelé le *pas* de P.

Pour une fonction α croissante sur $[a\,,b]$, on pose

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}).$$

Si f est une fonction réelle bornée sur $[a\,,b]$, on définit les *sommes de Darboux* supérieure et inférieure par rapport à α et relativement à P respectivement par

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i, \qquad L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i,$$

où

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \qquad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

On pose aussi

$$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \inf U(P, f, \alpha), \qquad \underline{\int_a^b} f\,d\alpha = \sup L(P, f, \alpha),$$

les bornes inférieures et supérieures étant prises sur l'ensemble des partitions P de $[a\,,b]$ et on appelle ces quantités les intégrales de Riemann-Stieltjes respectivement supérieure et inférieure. Si les intégrales de Riemann-Stieltjes supérieure et inférieure sont égales, on note leur valeur commune $\int_a^b f\,d\alpha$ que l'on appelle l'*intégrale de Riemann-Stieltjes par rapport à* α *sur* $[a\,,b]$. On dit dans ce cas que f est intégrable par rapport à α au sens de Riemann (ou Riemann-intégrable par rapport à α) et on écrit $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. Dans le cas particulier où $\alpha(x) = x$, on obtient l'intégrale de Riemann. Dans ce cas, la somme de Darboux supérieure (resp. inférieure) correspondant à une partition P et l'intégrale de Riemann supérieure (resp. inférieure) sont notées respectivement $U(P, f)$ (resp. $L(P, f)$) et $\overline{\int_a^b} f\,dx$ (resp. $\underline{\int_a^b} f\,dx$). L'intégrale de Riemann de f sur $[a\,,b]$ est notée $\int_a^b f\,dx$.

De plus, on choisit, pour chaque partition P de $[a\,,b]$, des points $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tels que $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et on considère la somme

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i.$$

On écrit

$$\lim_{\mu(P)\to 0} S(P, f, \alpha) = A$$

si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\mu(P) < \delta$ implique $|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon$ pour tous les choix admissibles de t_i. Dans le cas où $\alpha(x) = x$, on pose

$$S(P, f) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Dans toute cette section, on supposera toujours f bornée et α croissante sur $[a\,,b]$. On utilisera souvent les théorèmes suivants (voir, par exemple, [29]) dans les solutions des problèmes.

Théorème 1. *$f \in \mathcal{R}(\alpha)$ sur $[a\,,b]$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition P telle que*

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon.$$

Théorème 2. *Si f est continue sur $[a\,,b]$, alors $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ sur $[a\,,b]$.*

I.1.1. On suppose que α est croissante sur $[a\,,b]$, $a \leqslant c \leqslant b$, α est continue en c, $f(c) = 1$ et $f(x) = 0$ pour $x \neq c$. Prouver que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ et $\int_a^b f\,d\alpha = 0$.

I.1.2. On suppose que f est continue sur $[a\,,b]$, $a < c < b$, $\alpha(x) = 0$ si $x \in [a\,,c[$ et $\alpha(x) = 1$ si $x \in [c\,,b]$. Prouver que $\int_a^b f\,d\alpha = f(c)$.

I.1.3. Soit $0 < a < b$ et

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [a\,,b] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in [a\,,b] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Trouver les intégrales de Riemann supérieure et inférieure de f sur $[a\,,b]$.

I.1.4. Soit $a > 0$ et

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [-a\,,a] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in [-a\,,a] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Trouver les intégrales de Riemann supérieure et inférieure de f sur $[-a\,,a]$.

I.1.5. Prouver que la *fonction* dite *de Riemann*,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel ou } x = 0, \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^* \text{ et} \\ & p \text{ et } q \text{ premiers entre eux,} \end{cases}$$

est Riemann-intégrable sur tout intervalle $[a\,,b]$.

I.1.6. On note $f\colon [0\,,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Prouver que $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

I.1.7. Prouver que $f\colon [0\,,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right] & \text{sinon} \end{cases}$$

est Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.

I.1.8. On définit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1\,,0], \\ 1 & \text{si } x \in]0\,,1] \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1\,,0[, \\ 1 & \text{si } x \in [0\,,1]. \end{cases}$$

Prouver que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ bien que $\lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(P, f, \alpha)$ n'existe pas.

I.1.9. Prouver que si f et α ont un point commun de discontinuité dans $[a\,,b]$, alors $\lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(P,f,\alpha)$ n'existe pas.

I.1.10. Prouver que si $\lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(P,f,\alpha)$ existe, alors $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ sur $[a\,,b]$ et

$$\lim_{\mu(P)\to 0} S(P,f,\alpha) = \int_a^b f\,d\alpha.$$

Prouver aussi que cette égalité est vérifiée pour toute fonction f continue sur $[a,b]$.

I.1.11. Prouver que si f est bornée et α est continue sur $[a,b]$, alors $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ si et seulement si $\lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(P,f,\alpha)$ existe.

I.1.12. Soit

$$\alpha(x) = \begin{cases} c & \text{si } a \leqslant x < x^*, \\ d & \text{si } x^* < x \leqslant b, \end{cases}$$

où $c < d$ et $c \leqslant \alpha(x^*) \leqslant d$. Montrer que si la fonction f, bornée sur $[a,b]$, est telle qu'au moins une des fonctions f ou α est continue à gauche en x^* et l'autre continue à droite en x^*, alors $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ et

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(x^*)(d-c).$$

I.1.13. On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que α est une *fonction en escalier*, autrement dit qu'elle est constante sur les sous-intervalles $]a\,,c_1[$, $]c_1\,,c_2[$, ..., $]c_m\,,b[$, où $a < c_1 < c_2 < \cdots < c_m < b$. Prouver que

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(a)(\alpha(a^+)-\alpha(a)) + \sum_{k=1}^{m} f(c_k)(\alpha(c_k^+)-\alpha(c_k^-)) + f(b)(\alpha(b)-\alpha(b^-)).$$

I.1.14. En utilisant les intégrales de Riemann de fonctions choisies de façon appropriée, trouver les limites suivantes :

(a) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n}\right)$,

(b) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{1}{n^3+1^3}+\frac{1}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{1}{n^3+n^3}\right)$,

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}\right), \qquad k \geqslant 0,$

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)},$

(e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sin\dfrac{n}{n^2+1^2} + \sin\dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \sin\dfrac{n}{n^2+n^2}\right),$

(f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2^{1/n}}{n+1} + \dfrac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \dfrac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}}\right),$

(g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{2}{n}\right) \ldots f\left(\frac{n}{n}\right)}$, où f est une fonction continue strictement positive sur $[0\,,1]$.

I.1.15. Prouver que la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{1} + \frac{\sin\frac{2\pi}{n+1}}{2} + \cdots + \frac{\sin\frac{n\pi}{n+1}}{n}\right)$$

est strictement positive.

I.1.16. Prouver que si f est continûment dérivable sur $[0\,,1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,dx\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

En utilisant ce résultat, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right), \qquad k \geqslant 0.$$

I.1.17. Pour $k \geqslant 0$, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1^k + 3^k + \cdots + (2n-1)^k}{n^{k+1}}\right).$$

I.1.18. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[0\,,1]$ telle que f'' soit bornée et Riemann-intégrable. Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right) = \frac{f'(1)-f'(0)}{24}.$$

V