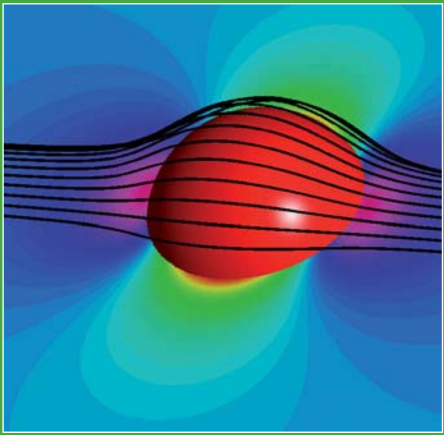
SAVOIRS PHYSIQUE ACTUELS

PHYSIQUE ET OUTILS MATHÉMATIQUES

MÉTHODES ET EXEMPLES



ANGEL ALASTUEY
MARC MAGRO
PIERRE PUJOL

EDP SCIENCES

CNRS ÉDITIONS

Angel Alastuey, Marc Magro et Pierre Pujol

Physique et outils mathématiques : méthodes et exemples

S A V O I R S   A C T U E L S

EDP Sciences / CNRS Éditions

Imprimé en France.

ISBN EDP Sciences 978-2-7598-0043-8

Table des matières

Liste des exercices

16. Hangar semi-cylindrique soumis au vent
17. Opérateur de Dirac
18. Avance du périhélie de Mercure
19. Oscillateur harmonique en présence d'une impureté

Chapitre 3 : pages 236-242

1. Unicité des solutions des équations de diffusion et de d'Alembert
2. Relations de réciprocité
3. Équation pour les câbles longs
4. Conditions de Neumann en théorie de la diffraction
5. Fonction de Green du d'Alembertien en dimension $2+1$
6. Fonction de Green du d'Alembertien en dimension $1+1$
7. Fonction de Green G_∞ du Laplacien en dimension $d \geq 3$
8. Diffusion de la chaleur dans une boule
9. Des conditions de Dirichlet aux conditions de Robin
10. Conditions de Robin pour l'équation de la chaleur
11. Équation de Cattaneo en 3d
12. Équation de Klein-Gordon

Chapitre 4 : pages 294-298

1. Comportement asymptotique de la fonction de Bessel J_0
2. Coefficients du binôme
3. Forme aymptotique de la fonction de Green de Helmholtz
4. Ensemble isotherme-isobare
5. Évolution d'un paquet d'ondes et vitesse de groupe
6. De la fonction de Green de Cattaneo à celle de l'équation de diffusion
7. Modèle d'Ising avec des interactions à longue portée
8. Marche aléatoire de Bernoulli
9. Oscillateur harmonique et théorie des nombres

Préface

L'enseignement des outils mathématiques nécessaires en physique est une tâche difficile. Bien qu'il existe de nombreux cours de mathématiques pour physiciens, dont certains sous la plume d'auteurs célèbres, ceux-ci ne suscitent en général pas l'enthousiasme des étudiants. Certains rechignent en effet à s'imposer le minimum de rigueur mathématique nécessaire, alors que les autres, n'ayant peut-être pas su choisir une voie la plus conforme à leurs goûts, souhaitent un enseignement toujours plus formel. Comme dans beaucoup d'autres sujets « à l'interface », il n'est donc pas rare que l'on aboutisse à un résultat qui n'intéresse aucune des deux parties en présence. Ce livre a le grand mérite d'éviter cet écueil en présentant divers outils mathématiques dans le contexte des problèmes de physique, qui bien souvent, en ont motivé l'invention. Ainsi, par exemple, les fonctions analytiques ne sont pas abordées comme une construction mathématique abstraite, isolée de tout autre contexte et dont on découvrirait dans un second temps les nombreuses applications potentielles. Au contraire, elles apparaissent naturellement comme motivées par le problème de la réponse linéaire, permettant de trouver des relations sur les susceptibilités d'un système physique et d'appréhender les conséquences des relations de causalité. Les fonctions de Green ou la méthode du col sont présentées en insistant sur la diversité de leurs applications, en soulignant ainsi les relations entre divers domaines de la physique, souvent présentés de façon isolée. Cette approche permet de dégager les concepts communs à ces différents domaines ainsi que les mécanismes généraux essentiels. J'ai eu l'occasion d'assister au développement initial de ce cours dans le cadre du DEA « Physique statistique et phénomènes non linéaires de l'ENS Lyon ». J'ai pu alors constater son succès, qui a largement dépassé le cadre du DEA en attirant de nombreux étudiants des maîtrises de mathématiques et de physique ainsi qu'une bonne partie des chercheurs du laboratoire de physique. Je souhaite à ce livre un succès comparable.

Stephan FAUVE

This page intentionally left blank

Avant-propos

Pendant l'hiver 1994-1995, Stephan FAUVE, alors responsable du DEA de Physique Statistique et Phénomènes Non-Linéaires de l'École Normale Supérieure de Lyon, proposa à l'un d'entre nous (A.A.) de faire un cours sur des outils mathématiques particulièrement utiles aux physiciens, comme les relations de Kramers-Kronig ou les fonctions de Green. Cette suggestion partait du constat, encore d'actualité à l'heure où nous écrivons ces lignes, que ces notions sont souvent voilées de mystère. Introduites de manière ponctuelle, chaque fois qu'elles interviennent dans un domaine particulier, elles apparaissent comme trop abstraites ou absconses, et donc hors de portée parce qu'elles feraient appel à des connaissances mathématiques trop pointues. Un des objectifs essentiels du cours qui débuta à la rentrée 1995 fut donc en quelque sorte de démythifier les méthodes correspondantes, en montrant qu'elles reposent sur des outils simples comme l'analyse dans le plan complexe. De plus, il s'agissait de privilégier les arguments et autres interprétations physiques, sans pour autant perdre la rigueur mathématique indispensable. Ce cours a été successivement repris par les deux autres auteurs de cet ouvrage (P.P. puis M.M.), d'abord en tant que cours de DEA, puis comme cours de première année de Master de physique. Ainsi, tout en conservant l'esprit original, le contenu du cours a été enrichi de nouvelles méthodes de résolution ainsi que d'autres applications, tandis que sa présentation a été adaptée à des étudiants de première année de Master.

L'ouvrage réalisé reprend la démarche des cours successivement donnés par chacun d'entre nous, en incorporant des aspects pédagogiques motivés par les réactions et les difficultés des étudiants. Il consiste en un exposé général des méthodes suivi d'exemples choisis parmi différents domaines de la physique. Le niveau requis correspond à la Licence de physique. Plus précisément, le lecteur est supposé être familier avec les piliers de la physique classique que sont la mécanique, l'électromagnétisme et la thermodynamique. Pour certains exemples, une connaissance limitée de concepts élémentaires de mécanique quantique ou de physique statistique est nécessaire. Lorsque les applications pourraient faire appel à des notions d'un niveau supérieur, nous avons opté pour des présentations très simples, accessibles directement sans avoir recours à des ouvrages spécialisés. Les digressions ou prolongements vers des problèmes plus complexes sont détachés du texte principal sous la forme de brefs commentaires. Une collection d'exercices, suivis de quelques éléments de solution, et un ensemble d'annexes complètent le corps principal du livre. Les annexes décrivent essentiellement certains compléments mathématiques, que le lecteur peut ainsi appréhender sans se perdre dans la littérature.

Le public concerné par ce livre comprend naturellement les étudiants en physique ou ingénierie, qu'ils soient en Master ou en Doctorat. Le caractère transversal de la présentation devrait les conduire à se détacher des particularités propres à chaque domaine pour identifier des propriétés essentielles communes. Passer d'un domaine à un autre, comme de la mécanique quantique à l'électromagnétisme par exemple, devrait les aider dans la synthèse de connaissances souvent éparpillées. L'ouvrage est également conçu comme un manuel, dont une lecture plus ponctuelle, en relation avec un problème concret, est possible. Dans ce but, les diverses situations physiques traitées sont répertoriées dans l'index. Ainsi, il devrait aussi être utile aux chercheurs, enseignants et ingénieurs.

Soulignons que l'approche et le style de ce livre le démarquent des ouvrages habituels de mathématiques pour la physique. Ici, il n'est point nécessaire de se mettre dans la peau d'un mathématicien, d'adopter sa tournure d'esprit et de maîtriser son langage... Pour l'ensemble des lecteurs concernés, l'apprentissage des méthodes devrait ainsi être plus efficace, notamment à travers les nombreuses applications traitées en détail. Nous espérons que ce livre contribuera à diffuser ces méthodes très utiles et simples d'emploi lorsqu'elles sont bien comprises.

L'idée d'écrire ce livre nous vint dans le courant de l'année 2002. Conçu au départ comme une simple transcription de nos notes de cours, le projet fut progressivement enrichi de nouveaux exemples et exercices. Il fut aussi l'occasion de discussions animées, chacun de nous trois ayant à cœur la réalisation d'un ouvrage le plus pédagogique possible. Il peut paraître difficile, voire frustrant, pour un chercheur ou un enseignant-chercheur de consacrer son temps à l'écriture d'un ouvrage didactique dont les résultats ne sont pas vraiment originaux. Cette contribution à la diffusion d'un savoir d'intérêt tout à fait actuel nous apporte finalement autant de plaisir qu'une découverte, bien que les méthodes exposées soient au demeurant fort anciennes !

Nous remercions Stephan FAUVE qui, après avoir été en quelque sorte à l'origine de cet ouvrage, nous a fait le plaisir et l'honneur d'en écrire la préface. Nous sommes reconnaissants à François DELDUC pour sa disponibilité, sa sagacité et ses suggestions, qui nous ont été utiles à maintes reprises. Merci aussi à Emmanuel LÉVÊQUE, qui a eu la gentillesse de réaliser l'illustration de la page de couverture. Merci enfin au rapporteur anonyme pour ses suggestions et ses critiques, ainsi qu'à Michèle LEDUC et Michel LE BELLAC pour leur confiance.

Lyon, Potsdam, Toulouse
Avril 2008

Introduction

Le but de ce livre est de présenter quelques méthodes générales pour résoudre des problèmes physiques variés. Les méthodes choisies relèvent de l'exploitation des propriétés analytiques des susceptibilités en réponse linéaire, de l'application des fonctions de Green à la résolution d'équations aux dérivées partielles, et de la méthode du col pour l'estimation d'intégrales de tout type.

Comme illustré par la diversité des exemples traités, ces méthodes s'appliquent avec succès à de nombreux problèmes d'électromagnétisme, de mécanique classique ou quantique, de physique statistique ou de théorie des champs, etc. En fait, dresser un inventaire des applications reviendrait à énumérer presque tous les domaines. Ce large éventail d'applications possibles a inspiré une présentation transversale de ces méthodes, dans un cadre général qui ne soit pas spécifique à une branche ou un domaine particulier. Ce point de vue unificateur détermine la structure de chaque chapitre : la première partie est consacrée à l'exposé de propriétés générales qui mettent en lumière le caractère universel de certains mécanismes ; des exemples variés sont présentés dans la deuxième partie ; ces exemples enrichissent la compréhension des mécanismes généraux en suggérant des connexions entre problèmes différents ; bien entendu, ils présentent également un intérêt et une motivation qui leur sont propres. Les exercices proposés en troisième partie, et pour lesquels nous donnons des indications de solutions, complètent chaque chapitre. La présentation adoptée ici donne la préférence aux arguments et aux exemples physiques, sans masquer pour autant les difficultés et les subtilités mathématiques.

Au-delà de leur intérêt pour la résolution de problèmes concrets, ces méthodes présentent des caractéristiques remarquables qui sont discutées en détail dans chaque chapitre. Nous présentons ici quelques-unes d'entre elles, qui nous semblent particulièrement importantes. Les propriétés analytiques des susceptibilités sont peu dépendantes de la complexité plus ou moins grande de la dynamique intrinsèque du système considéré. Par exemple, un pôle dans l'admittance d'un circuit RLC est en quelque sorte identique à un pôle dans la constante diélectrique d'un milieu matériel. Cette structure analytique commune ouvre la voie à des modélisations simples.

Les singularités de la susceptibilité d'un système soumis à un faible forçage monochromatique s'identifient aux modes propres du système. Leur amortissement est contrôlé par des mécanismes dissipatifs. Cette présence de dissipation implique que le forçage doit fournir de l'énergie pour entretenir des oscillations. Dans certains systèmes, la dissipation est explicitement introduite dans les équations du mouvement, comme la viscosité en hydrodynamique. Dans les systèmes conservatifs à l'équilibre thermodynamique, elle est induite par des mécanismes subtils. Néanmoins, dans tous les cas, sa signature analytique est identique ! Soulignons qu'en l'absence de dissipation, une absorption d'énergie est également possible *via* des effets résonants.

En vertu de la linéarité des équations aux dérivées partielles considérées, les fonctions de Green statiques et dynamiques constituent les briques élémentaires qui permettent de construire la solution générale par superposition. Les fonctions de Green causales présentent aussi un double caractère. D'une part, elles peuvent être interprétées comme des fonctions de réponse. D'autre part, elles décrivent la diffusion et/ou la propagation de certaines quantités physiques.

Pour définir univoquement la solution d'une équation aux dérivées partielles, il est essentiel d'imposer des conditions aux limites sur la quantité recherchée. Il faut garder à l'esprit que des conditions aux limites voisines peuvent conduire à des solutions extrêmement différentes. De plus, ces conditions aux limites doivent être ajustées de sorte à incorporer les caractéristiques physiques du problème considéré. Par exemple, dans un problème de diffusion dans une boîte, l'évolution de la densité de particules dépend de manière cruciale de la nature réfléchissante ou absorbante des parois, qui se traduit par des conditions de bord distinctes.

Les propriétés de symétrie jouent un rôle important dans la résolution des équations aux dérivées partielles. Soulignons que ces propriétés doivent être analysées en examinant à la fois l'opérateur en jeu, la forme des frontières et la nature des conditions aux limites.

Les fonctions de Green associées aux résolvantes sont extrêmement utiles. Elles permettent d'analyser les propriétés spectrales des opérateurs concernés, et elles apparaissent comme les ingrédients naturels des développements perturbatifs. De plus, elles sont reliées simplement à des fonctions de Green dynamiques, ce qui facilite la détermination de ces dernières.

Enfin, la méthode du col est d'une très grande importance pratique de par ses innombrables applications. Elle embrasse une large panoplie de significations physiques suivant les domaines considérés. Par exemple, elle conduit à la théorie champ moyen de Landau de la transition paramagnétique-ferromagnétique, tout comme à l'approximation semi-classique en mécanique quantique, en passant par l'extensivité de l'énergie libre d'un gaz idéal *via* la formule de Stirling !

Chapitre 1

Réponse linéaire et analyticité

Quel que soit le domaine, mécanique classique ou mécanique quantique, électromagnétisme, hydrodynamique, thermodynamique, physique statistique, etc., un physicien est souvent conduit à déterminer la réponse d'un système à une faible perturbation extérieure. Il peut s'agir, par exemple, du courant induit dans un circuit par application d'une tension alternative, ou de la polarisation d'un atome soumis à un champ électrique variable, ou bien encore du débit de fluide dans un capillaire forcé par un gradient de pression. Bien que ces systèmes relèvent de différents domaines de la physique, la réponse recherchée doit obéir à des principes simples et fondamentaux, et donc communs à tous ces problèmes. Ainsi, dans tous les cas étudiés, la réponse doit satisfaire au principe de causalité, qui impose que la perturbation appliquée à un temps donné n'agisse sur l'état du système que pour des temps postérieurs. Par ailleurs, si la perturbation est suffisamment faible, la réponse du système peut, en général, être supposée linéaire en la perturbation.

Dans ce chapitre, il est montré comment quelques principes simples permettent d'établir des résultats généraux sur la forme et les propriétés de la réponse linéaire. Cette approche présente deux atouts majeurs. Le premier, déjà évoqué, tient justement au caractère générique des propriétés obtenues, indépendamment de la nature précise et de la complexité du système considéré. Cet aspect universel est illustré par l'étude détaillée de plusieurs systèmes soumis à des excitations oscillant dans le temps à une fréquence donnée. Le second atout majeur de cette approche peut paraître *a priori* surprenant : en effet, bien que les principes permettant d'établir les propriétés générales de la réponse linéaire soient simples, leurs conséquences ne sont pas pour autant mineures et sont même parfois retentissantes ! Il est judicieux à cet égard de dévoiler dès à présent l'origine du titre de ce chapitre en justifiant ces propos par un exemple. Une des propriétés essentielles de la réponse linéaire tient à l'analyticité d'une quantité physique centrale, la susceptibilité, qui est conçue comme une fonction de la fréquence de l'excitation. Sans entrer dans les détails, indiquons simplement que la susceptibilité vérifie des relations importantes, caractéristiques de certaines fonctions analytiques et dites de Kramers-Kronig. Ces relations ont une portée inattendue. Par exemple, elles impliquent un résultat standard d'électromagnétisme, à savoir que dans n'importe quel milieu dispersif, la vitesse de propagation d'ondes électromagnétiques est inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide.

Dans la première partie de ce chapitre, les propriétés générales de la réponse à une faible excitation sont établies à partir du triptyque causalité-linéarité-stationnarité. Ces propriétés générales sont ensuite explicitées à travers différents exemples. L'intérêt spécifique de chaque exemple tient à l'utilisation concrète d'une ou plusieurs propriétés, tant pour la compréhension des mécanismes en jeu que pour leur description phénoménologique. De plus, ces exemples sont choisis dans différents domaines de la physique (électronique, mécanique quantique, électromagnétisme, mécanique des fluides, physique statistique et enfin physique des plasmas) afin de mettre en lumière la puissance des méthodes, ainsi que leur caractère unificateur, source d'analogies nombreuses et fécondes. Naturellement, chaque exemple présente également un intérêt propre.

Les exemples sont présentés suivant un ordre croissant de difficulté résultant d'une dynamique interne des sytèmes de plus en plus complexe. Ainsi, le premier exemple concerne un système classique à petit nombre de degrés de liberté : c'est un circuit RLC qui possède en plus une dynamique intrinsèque linéaire, de type oscillateur harmonique. Ensuite, nous passons à l'étude de systèmes continus, qui ont donc un nombre infini de degrés de liberté. Nous commençons avec l'exemple d'un diélectrique qui illustre l'application des propriétés d'analyticité à des modélisations phénoménologiques. L'exemple suivant est un écoulement oscillant dans un capillaire forcé par une variation de pression. Nous abordons enfin l'étude de la réponse linéaire de systèmes avec un grand nombre de degrés de liberté et à l'équilibre thermodynamique, cette problématique de mécanique statistique constituant un domaine en soi ! Un premier exemple est l'étude d'un plasma soumis à une onde de densité de charge dans une approche de type champ moyen à la Vlasov. À titre de dernière application, nous présentons différentes démonstrations des formules de Kubo classique et quantique, relatives à la conductivité électrique. Notons enfin qu'un dernier exemple dévolu à l'atome d'hydrogène soumis à un champ électrique variable est présenté dans le chapitre 3, cet exemple constituant également une application des développements perturbatifs en termes de fonctions de Green.

1.1 Propriétés générales

1.1.1 Position du problème

Considérons un système général ayant un nombre quelconque de degrés de liberté, et dont la description relève de n'importe quel domaine de la physique. Ce système est initialement dans un état stationnaire $\mathcal{E}_0$ et les quantités physiques relatives à cet état sont donc indépendantes du temps. Imaginons maintenant que ce système soit soumis à une faible perturbation homogène mais dépendant du temps, $F(t)$, avec les conditions initiales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{État}(t=-\infty) = \mathcal{E}_0 \\ F(t=-\infty) = 0 \end{array} \right\}.$$

Examinons alors une certaine quantité physique ou observable A. Ici, il s'agit de déterminer la forme de la réponse du système à la perturbation, c'est-à-dire la relation entre $A(t)$ et $F(t')$. Pour fixer les idées, $\mathcal{E}_0$ peut correspondre par exemple à un oscillateur mécanique au repos, F à une force et A au déplacement de cet oscillateur par rapport à sa position d'équilibre.

Forme générale de la réponse

Comme il est toujours possible d'effectuer sur la quantité physique A étudiée un décalage de sa valeur d'équilibre $A(\mathcal{E}_0)$, nous poserons désormais $A(\mathcal{E}_0) = 0$ sans perte de généralité. La réponse du système à la perturbation doit obéir à des principes physiques simples et c'est pour cette raison qu'elle possède des propriétés communes à de nombreuses situations. Étudions ces propriétés successivement :

Linéarité. Même pour des systèmes dont les équations du mouvement sont non-linéaires, comme la perturbation est faible, il est naturel de supposer que la réponse $A(t)$ est linéaire en $F(t')$, c'est-à-dire que

$$A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t' \; K_0(t,t') \; F(t'). \tag{1.1}$$

Ceci revient à ne conserver que le premier terme d'un développement de Taylor en puissances de F pour la fonctionnelle $A_{[F]}(t)$,

$$A_{[F]}(t) = A_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t' \; \frac{\delta A_{[F]}(t)}{\delta F(t')}\bigg|_{F=0} F(t') + \cdots$$

avec $A_0 = A_{[F=0]} = A(\mathcal{E}_0) = 0$ par hypothèse et donc $K_0(t,t') = \frac{\delta A_{[F]}(t)}{\delta F(t')}\Big|_{F=0}$. K_0 est appelée dérivée fonctionnelle[1] de $A_{[F]}$ prise en $F = 0$.

1. Le lecteur intéressé peut consulter l'annexe H où sont rappelées la définition et les propriétés de la dérivée fonctionnelle. Toutefois, cette notion n'est pas utilisée dans ce chapitre.

En fait, soulignons que deux hypothèses fondamentales doivent être nécessairement vérifées afin que le développement précédent soit légitime. Tout d'abord, il faut que l'état $\mathcal{E}_0$ soit un état stable : faiblement écarté de cet état, le système doit en rester proche dans son évolution ultérieure. Ceci exclut bien sûr des états stationnaires instables, comme par exemple, celui d'un pendule pesant avec centre de gravité au-dessus du point d'attache. Ensuite, la différentiabilité de $A_{[F]}$ implique une dépendance suffisamment régulière en F de la fonctionnelle A. *A contrario*, la non-différentiabilité est la signature de comportements singuliers, comme ceux à l'œuvre au point critique d'une transition de phase en thermodynamique✠.

Un autre point important à souligner est le caractère non instantané de la réponse du système. Autrement dit, la valeur de l'observable A à l'instant t dépend en principe de la valeur de la perturbation F à d'autres instants t'.

✠ **Commentaire 1.1.1.** Par exemple, pour un système magnétique présentant une transition entre des phases ferromagnétique et paramagnétique, à la température critique la susceptibilité diverge, et l'aimantation n'est plus proportionnelle au champ magnétique extérieur appliqué.

L'hypothèse de linéarité impose donc que K_0 soit une quantité intrinsèque au système et à l'état $\mathcal{E}_0$. Elle dépend bien sûr de l'observable A considérée. Elle ne dépend pas de l'évolution temporelle précise de F, mais seulement de la manière dont le forçage agit sur le système. Les propriétés de cette grandeur vont être étudiées tout au long de cette section.

Causalité. Il s'agit d'un principe fondamental en physique et qui va au-delà de l'hypothèse de linéarité. En reprenant l'exemple d'un oscillateur mécanique, il indique simplement que la force appliquée à un instant donné t_0 n'agit sur le déplacement de l'oscillateur que pour des instants postérieurs à t_0. En d'autres termes, et dans le cas général, la réponse du système à un instant donné ne dépend que de la perturbation appliquée à des temps antérieurs, soit :

$$K_0(t,t') = 0 \text{ pour } t < t'. \tag{1.2}$$

Nous montrerons dans la suite que cette propriété simple a des conséquences fondamentales. Pour l'instant, en injectant la condition (1.2) dans l'expression (1.1), nous obtenons

$$A(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' \; K_0(t,t') \; F(t'). \tag{1.3}$$

Stationnarité. $\mathcal{E}_0$ étant stationnaire, K_0 est invariant par translation dans le temps, *i.e.* :

$$K_0(t,t') = K_0(t-t').$$

En effet, la dépendance de K_0 en la seule différence $t-t'$, garantit l'invariance de K_0 si t et t' sont simultanément décalés d'un même temps Δt. Cela implique que ce décalage Δt pour la perturbation $F(t)$ donne le même décalage pour la réponse $A(t)$. Plus précisément, la réponse du système à la perturbation $F_2(t) = F_1(t-\Delta t)$ est donnée par

$$A_2(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' K_0(t,t') F_2(t') = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' K_0(t,t') F_1(t'-\Delta t).$$

Si $K_0(t,t') = K_0(t-t')$, un simple changement de variable dans l'intégrale précédente montre que $A_2(t) = A_1(t-\Delta t)$.

En vertu de l'ensemble des propriétés précédentes, la réponse du système se réécrit donc comme

$$A(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'\ K_0(t-t')\ F(t')$$

ou encore

$$\boxed{A(t) = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\ K_0(\tau)\ F(t-\tau).} \tag{1.4}$$

Propriétés de la fonction de réponse et interprétation

$K_0(\tau)$ joue donc le rôle de fonction de réponse avec mémoire puisqu'elle contrôle la contribution de la perturbation à l'instant $t-\tau$ à la quantité A pour l'instant ultérieur t. Afin de préciser la signification de K_0, prenons le cas où l'excitation est un pulse, *i.e.* $F(t) = F_0\delta(t-t_0)$ où $\delta(t-t_0)$ est la distribution de Dirac centrée en t_0. L'action du pulse est d'écarter faiblement le système de l'état stationnaire $\mathcal{E}_0$ à l'instant t_0, l'évolution ultérieure du système étant régie par sa seule dynamique interne. Or, d'après l'équation (1.4), la réponse à ce type d'excitation est

$$A_{pulse}(t) = F_0 K_0(t-t_0) \text{ pour } t > t_0. \tag{1.5}$$

L'évolution correspondante de l'observable A est donc simplement proportionnelle à la fonction $K_0(\tau)$. Ceci confirme que la fonction de réponse K_0 est évidemment spécifique à l'observable A considérée. De plus, nous pouvons en déduire immédiatement la nature qualitative des comportements de $K_0(\tau)$, quand $\tau \to \infty$ et quand $\tau \to 0$, à partir d'arguments simples concernant l'évolution intrinsèque du système sans forçage extérieur.