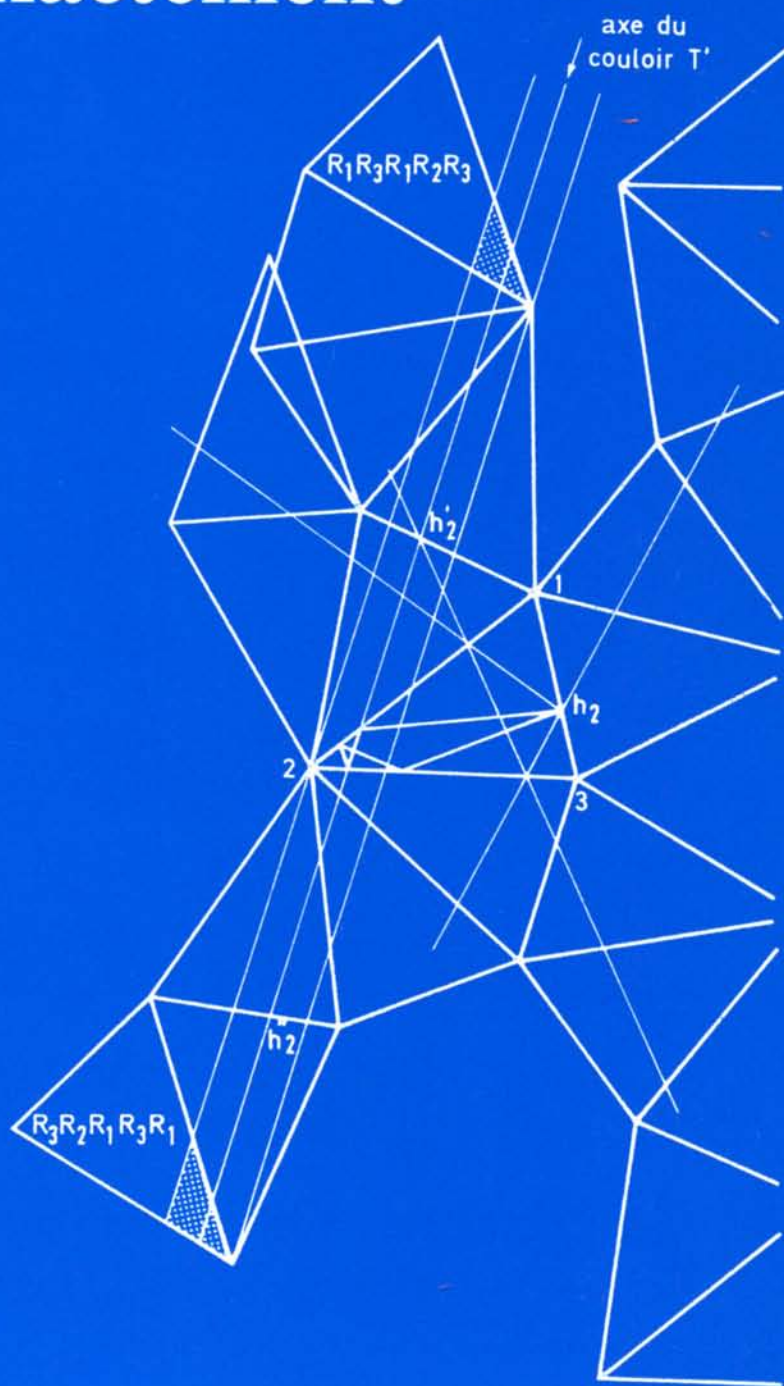


Travaux de
Michel GAUDIN

Modèles exactement résolus



les éditions

de physique

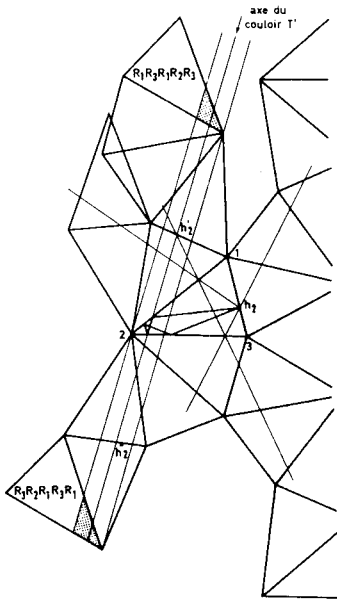
**Travaux de
Michel GAUDIN**

CEA Saclay - Service de Physique Théorique

Modèles exactement résolus



**Avenue du Hoggar
Zone Industrielle de Courtabœuf
B.P. 112
F-91944 Les Ulis cedex A, France**



Document de couverture :

La translation $T' = (R_1R_3R_1R_2R_3)^2$ et le couloir associé. La trajectoire pentagonale singulière correspondant à l'axe du couloir.

M. Gaudin, figure 3 p.407 dans "Réduction du problème du billard quantique triangulaire".

ISBN : 2-86883-264-4

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les "copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective", et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, "toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite" (alinéa 1er de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du code pénal.

© Les Editions de Physique 1995

Les Editions de Physique

France

Avenue du Hoggar
Zone Industrielle de Courtabœuf
B.P. 112
91944 Les Ulis cedex A

Tel.: (33-1) 69 18 75 75

Fax.: (33-1) 69 28 84 91

Serveur: <http://www.ed-phys.fr>

USA

PCG Inc.
875-81 Massachusetts
Avenue Cambridge MA
02139 USA

Fax.: (1) 617 354 6875

Préface

A l'occasion des 60 ans de Michel Gaudin, les membres du Service de Physique Théorique de Saclay ont voulu lui rendre hommage. Ceux qui ont été tant marqués par son originalité et sa curiosité intellectuelle ont pensé que la meilleure façon de l'honorer était d'offrir aux physiciens une synthèse de son œuvre scientifique.

Michel Gaudin, ingénieur des Ponts, est entré au CEA en 56 grâce à G. Vendryès pour y travailler deux ans en Neutronique expérimentale. Après la session des Houches de 58, il entre finalement au service de physique théorique dirigé alors par C. Bloch, service où il aura effectué toute sa carrière à l'exception d'une année chez C.N. Yang à l'université de Stony Brook en 1970.

Ce recueil contient essentiellement ce qu'on appelle, pour être bref, des solutions exactes à des problèmes de physique dont la formulation est simplifiée en un modèle. Par là, j'entends que l'on peut, presque toujours, s'intéresser au sujet traité sans être un spécialiste. Sa lecture nécessite néanmoins certaines connaissances de physique et de mathématiques, et peut conduire à consulter des ouvrages de référence. Je ne connais pas d'article de Michel Gaudin qui ne m'ait appris une méthode d'analyse ou une technique de raisonnement, et dans tous les domaines ses travaux m'ont apporté l'éclairage profondément vivifiant d'un physicien imprégné de culture classique. Son style presque littéraire peut surprendre, il s'accorde avec une approche artisanale des problèmes et il faut, pour le lire, faire l'effort de suivre le cheminement exigeant et fécond de sa pensée. Je souhaite que cet ouvrage puisse être une source d'inspiration en donnant l'exemple d'une personnalité de la physique française parmi les plus créatives, bien que restée fidèle à elle-même en se tenant à l'écart des modes. Je crois qu'il n'est pas exagéré d'ajouter que certains des articles que nous reproduisons participent à des démarches originales qui ont ouvert des voies en physique théorique et en mathématiques. Ils ont été regroupés dans cinq chapitres :

Le premier traite des propriétés statistiques des ensembles de matrices sur lesquelles M. Gaudin a travaillé durant ses premières années à Saclay. Les articles contiennent entre autres la dérivation de la loi limite des espacements de niveaux.

Le deuxième chapitre est consacré à la mécanique statistique. Deux articles en particulier concernent les propriétés d'un gaz de particules qui se repoussent selon les lois de l'électrostatique à deux dimensions.

Le troisième chapitre regroupe les travaux sur les systèmes quantiques intégrables qui ont occupé leur auteur pendant une partie importante de sa carrière. Il commence par sa thèse non publiée, jusqu'ici, consacrée à l'étude d'un modèle de fermions en interaction. On y trouvera en outre ses fameux résultats sur la normalisation des états de Bethe, les propriétés thermodynamiques de la chaîne XXZ ainsi que l'introduction de la méthode algébrique pour diagonaliser une classe d'Hamiltoniens de spin.

Le quatrième chapitre rassemble des travaux sur des modèles non-intégrables, soit résolus complètement, soit réduits jusqu'à un certain point. Un exemple est le problème du spectre du Laplacien dans un triangle.

Le dernier chapitre contient un article non publié qui développe un algorithme pour calculer un Lagrangien effectif de fermions couplés à un champ de jauge.

Je remercie chaleureusement M. A. Landesman et Mme J. Berger pour tout le soin qu'ils ont apporté à la préparation et à l'édition de ce livre.

Je terminerai en évoquant le souvenir de Claude Itzykson. Sa haute considération pour l'oeuvre de M. Gaudin l'avait conduit à en encourager vivement la publication. Survenue pendant la préparation de cet ouvrage, sa mort, qui nous laisse profondément choqués, est une perte immense pour la physique française.

V. Pasquier

Table des matières

A. Ensembles de matrices	1
On the Density of Eigenvalues of a Random Matrix	3
Sur la loi limite de l'espacement des valeurs propres d'une matrice aléatoire	13
Une famille à un paramètre d'ensembles unitaires	25
Calculation of a Partition Function Defined in the Statistical Theory of Nuclear Reactions	57
B. Mécanique statistique	71
Sur le développement de la grande fonction de partition pour des systèmes de particules identiques	73
Gaz Coulombien discret à une dimension	93
L'isotherme critique d'un plasma sur réseau ($\beta = 2, d = 2, n = 2$)	105
Les premiers termes de l'énergie libre dans le modèle de Feynman pour la transition λ	121
Méthode d'intégration sur les variables d'énergie dans les graphes de la théorie des perturbations	125
C. Systèmes intégrables	153
Thèse soutenue le 21 Novembre 1967 (Université Paris): Étude d'un modèle à une dimension pour un système de fermions en interaction	155
<i>Détermination du spectre d'énergie</i>	155
1. Introduction	155
2. Spin total et type de symétrie [14]	159
3. Forme générale d'une solution élémentaire	160
4. Les conditions de symétrie	161
5. Les conditions aux limites	165
6. Paramétrisation des ensembles $\{k\}$ par l'ensemble $\{q\}$	168
7. Les coefficients de la fonction d'onde dans le secteur initial	170
8. Le cas du spin $S = 0$	174
9. Le cas général de spin S	175
10. Caractère complet de la solution	178

<i>Quelques propriétés de l'état fondamental</i>	185
11. <i>Étude des équations couplées</i>	185
12. <i>Nature du gaz attractif</i>	190
13. <i>Voisinage de $V = 0$ à volume fini</i>	196
14. <i>Énergie de l'état fondamental de spin donné : cas attractif</i>	200
15. <i>Énergie de l'état fondamental (spin 0) : cas attractif</i>	204
16. <i>Énergie de l'état fondamental (spin 0) : cas répulsif</i>	211
17. <i>Excitations élémentaires</i>	214
18. <i>Conclusion</i>	221
<i>Appendices</i>	223
Etats propres et valeurs propres de l'Hamiltonien d'appariement	247
Un système à une dimension de fermions en interaction	279
Boundary Energy of a Bose Gas in One Dimension	281
Bose Gas in One Dimension. I. The Closure Property of the Scattering Wavefunctions	289
Bose Gas in One Dimension. II. Orthogonality of the Scattering States	293
Thermodynamics of the Heisenberg-Ising Ring for $\Delta \geq 1$	297
Diagonalisation d'une classe d'Hamiltoniens de spin	301
Matrices R de dimension infinie	313
The Periodic Toda Chain and a Matrix Generalization of the Bessel Function Recursion Relations	323
Une preuve de la relation étoile-triangle du modèle elliptique Z_N de Zamolodchikov	333
D. Modèles exacts non intégrables	345
Solution exacte d'un problème modèle à trois corps. Etat lié	347
Sur le problème de deux ou trois électrons en présence d'un moment localisé	363
Spectre du noyau intégral $(x^2 + y^2 + 1)^{-1}$	389
Réduction du problème du billard quantique triangulaire	403
E. Divers	417
Algorithme invariant pour le développement d'un Lagrangien effectif en polynômes dérivatifs locaux	419

Ensembles de matrices

ON THE DENSITY OF EIGENVALUES OF A RANDOM MATRIX

M. L. MEHTA † and M. GAUDIN

Centre d'Études Nucléaires de Saclay, Gif-sur-Yvette (S. et O.) France

Received 5 May 1960

Abstract: An exact expression for the density of eigenvalues of a random-matrix is derived. When the order of the matrix becomes infinite, it can be seen very directly that it goes over to Wigner's "semi-circle law".

1. Introduction

In heavy nuclei, the interactions are so numerous and so complex that almost all the theories are statistical in nature and they try to explain only the average properties like level-density, mean square angular momenta, distribution of level-spacings, transition probability, etc. ††.

In this paper, which is essentially the continuation of the preceding one ¹⁾, we start from the random matrix hypothesis and calculate exactly the level-density. This, in the proper limit, will be found to be the famous "semi-circle law" of Wigner ²⁾. The proof here is, however, mathematically rigorous.

The joint probability frequency function of the eigenvalues $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ of an $n \times n$ hermitian matrix, whose elements are randomly and independently distributed (these distributions being invariant under unitary transformations), is given by ³⁾

$$P(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \mu_0^{-1} e^{-\sum_{i=1}^n \theta_i^2} \prod_{i < j} |\theta_i - \theta_j|, \quad (1)$$

with

$$\mu_0 = n! 2^{-\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{g=1}^n \Gamma(\frac{1}{2}g). \quad (2)$$

To get the level-density one must integrate the expression (1) over all the variables but one, i.e.

$$P(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} P(\theta, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n) d\theta_2 d\theta_3 \dots d\theta_n. \quad (3)$$

We shall do it explicitly for $n = 2m$. As in the preceding paper, we overcome the serious difficulty of the unfavourable symmetrical nature of the integrand in eq. (3) by integrating over half the variables, $\theta_3, \theta_5, \dots$, say. We then drop the ordering of the variables, expressing the result in determinantal form.

† On leave of absence from Tata Institute of Fundamental Research, Bombay.

†† For a fairly extensive list of references see the preceding paper.

After some reductions this determinant will be transformed into the integral of the square of another one whose elements are Hermite polynomials. This will permit us to use the orthonormality properties of the harmonic oscillator wave functions. In this form the problem becomes that of the density of a one dimensional Fermi-gas. By taking the limit when $n \rightarrow \infty$, one gets the "semi-circle law":

$$P(\theta) = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} \sqrt{n-\theta^2} & \text{for } \theta < \sqrt{n}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4)$$

2. Symmetrization and Reduction

By definition, we have

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{(n-1)!} P(\theta) &= \int_{-\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \infty} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}_{x_1=\theta} dx_2 dx_3 \dots dx_n \\ &+ \int_{-\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \infty} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}_{x_2=\theta} dx_1 dx_3 \dots dx_n \\ &+ \dots + \dots \\ &= \mathcal{O}(\theta) + \mathcal{E}(\theta), \end{aligned} \quad (5)$$

where $\mathcal{O}(\theta)$ includes the integrals in which an x with an odd index is put equal to θ , while $\mathcal{E}(\theta)$ includes the other terms. Introducing the functions

$$F_i(x) = \int_{-\infty}^x e^{-y^2} y^i dy, \quad (6)$$

and the step-function

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > \theta, \\ 0 & \text{if } x < \theta, \end{cases} \quad (7)$$

$\mathcal{O}(\theta)$ is readily seen to be

$$\mathcal{O}(\theta) = - \int_{-\infty < x_2 < x_4 < \dots < \infty} e^{-(\theta^2 + x_2^2 + x_4^2 + \dots)} \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon(x_2) & 0 & \varepsilon(x_4) & 0 & \dots \\ 1 & F_0(x_2) & 1 & F_0(x_4) & 1 & \dots \\ \theta & F_1(x_2) & x_2 & F_1(x_4) & x_4 & \dots \\ \theta^2 & F_2(x_2) & x_2^2 & F_2(x_4) & x_4^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} dx_2 dx_4 \dots \quad (8)$$

For simplicity, we shall take n even, $n = 2m$. As for $\mathcal{E}(\theta)$ we may integrate over x_2, x_4, \dots in a similar way by introducing the functions

$$\phi_i(x) = \int_x^\infty e^{-y^2} y^i dy, \tag{9}$$

and by an obvious change of the variables to their negatives, it is seen that

$$\mathcal{E}(\theta) = \mathcal{O}(-\theta). \tag{10}$$

Now the integrand in eq. (8) being symmetric in x_2, x_4, \dots, x_{2m} we can integrate over these variables separately and independently over the whole range and divide the result by $m!$. It is easy to verify directly (see appendix I of the preceding article) by expanding with respect to the first column, for example, that

$$\mathcal{O}(\theta) = \mathcal{O}_{\text{even}}(\theta) + \mathcal{O}_{\text{odd}}(\theta), \tag{11}$$

with

$$\mathcal{O}_{\text{even}}(\theta) = -e^{-\theta^2} \begin{vmatrix} 0 & \phi_1(\theta) & \phi_3(\theta) & \dots & \phi_{2m-1}(\theta) \\ 1 & f_0^1 & f_0^3 & \dots & f_0^{2m-1} \\ \theta^2 & f_2^1 & f_2^3 & \dots & f_2^{2m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta^{2m-2} & f_{2m-2}^1 & f_{2m-2}^3 & \dots & f_{2m-2}^{2m-1} \end{vmatrix}, \tag{12}$$

and

$$\mathcal{O}_{\text{odd}}(\theta) = e^{-\theta^2} \begin{vmatrix} 0 & \theta & \theta^3 & \dots & \theta^{2m-1} \\ \phi_0(\theta) & f_0^1 & f_0^3 & \dots & f_0^{2m-1} \\ \phi_2(\theta) & f_2^1 & f_2^3 & \dots & f_2^{2m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{2m-2}(\theta) & f_{2m-2}^1 & f_{2m-2}^3 & \dots & f_{2m-2}^{2m-1} \end{vmatrix}, \tag{13}$$

where the f_i^j are the numbers

$$f_i^j = F_i^j - F_j^i, \tag{14}$$

with

$$F_i^j = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} F_i(x) x^j dx = \int_{-\infty < y < x < +\infty} e^{-(x^2+y^2)} x^j y^i dx dy. \tag{15}$$

The following recurrence relations are easily established:

$$f_i^j - \frac{1}{2}(j-1)f_i^{j-2} = 2^{-\frac{1}{2}(i+j)} \Gamma\left(\frac{i+j}{2}\right) \equiv \xi_{i+j-1}, \tag{16}$$

say, and

$$\phi_j(\theta) - \frac{1}{2}(j-1)\phi_{j-2}(\theta) = \frac{1}{2}\theta^{j-1}e^{-\theta^2}. \tag{17}$$

Using these recurrence relations it is elementary to reduce the determinants (12) and (13) to the forms

$$\mathcal{O}_{\text{even}} = -\frac{1}{2}e^{-2\theta^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \theta^2 & \dots & \theta^{2m-2} \\ 1 & \xi_0 & \xi_2 & \dots & \xi_{2m-2} \\ \theta^2 & \xi_2 & \xi_4 & \dots & \xi_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta^{2m-2} & \xi_{2m-2} & \xi_{2m} & \dots & \xi_{4m-4} \end{vmatrix}, \tag{19}$$

and

$$\mathcal{O}_{\text{odd}} = \theta e^{-\theta^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \theta^2 - 1 & \dots & \theta^{2m-2} - (m-1)\theta^{2m-4} \\ \phi_0(\theta) & \xi_0 & \xi_2 & \dots & \xi_{2m-2} \\ \phi_2(\theta) & \xi_2 & \xi_4 & \dots & \xi_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{2m-2}(\theta) & \xi_{2m-2} & \xi_{2m} & \dots & \xi_{4m-4} \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Now, as

$$\phi_i(x) = (-)^i F_i(-x), \tag{21}$$

we can write the result as

$$\frac{\mu_0}{(2m-1)!} P(\theta) = T_1(\theta) + T_2(\theta) + T_3(\theta), \tag{22}$$

with

$$T_1(\theta) = 2 \mathcal{O}_{\text{even}}(\theta), \tag{23}$$

$$T_2(\theta) = -\theta e^{-\theta^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \theta^2 & \dots & \theta^{2m-2} \\ \rho_0(\theta) & \xi_0 & \xi_2 & \dots & \xi_{2m-2} \\ \rho_2(\theta) & \xi_2 & \xi_4 & \dots & \xi_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{2m-2}(\theta) & \xi_{2m-2} & \xi_{2m} & \dots & \xi_{4m-4} \end{vmatrix}, \tag{24}$$

and

$$T_3(\theta) = \theta e^{-\theta^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2\theta^2 & \dots & (m-1)\theta^{2m-4} \\ \rho_0(\theta) & \xi_0 & \xi_2 & \xi_4 & \dots & \xi_{2m-2} \\ \rho_2(\theta) & \xi_2 & \xi_4 & \xi_6 & \dots & \xi_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{2m-2}(\theta) & \xi_{2m-2} & \xi_{2m} & \xi_{2m+2} & \dots & \xi_{4m-4} \end{vmatrix}, \tag{25}$$

where the functions $\rho_{2i}(\theta)$ are defined by

$$\rho_{2i}(\theta) = \int_{-\theta}^{+\theta} e^{-x^2} x^{2i} dx. \tag{26}$$

We may note that

$$\frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{1}{\theta} e^{\theta^2} T_2(\theta) \right\} = -2e^{\theta^2} T_3(\theta) + 2e^{\theta^2} T_1(\theta). \tag{27}$$

One can easily show that (see appendix III of the preceding paper)

$$\begin{vmatrix} 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{2m} \\ b_0 & \xi_0 & \xi_2 & \dots & \xi_{2m} \\ b_2 & \xi_2 & \xi_4 & \dots & \xi_{2m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{2m} & \xi_{2m} & \xi_{2m+2} & \dots & \xi_{4m} \end{vmatrix} \quad (28)$$

$$= -\frac{1}{m!} \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dy_m e^{-(v_1^2 + \dots + v_m^2)} \begin{vmatrix} a_0 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & y_1^2 & \dots & y_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2m} & y_1^{2m} & \dots & y_m^{2m} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_0 & 1 & \dots & 1 \\ b_2 & y_1^2 & \dots & y_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{2m} & y_1^{2m} & \dots & y_m^{2m} \end{vmatrix}.$$

And hence we have

$$T_1(\theta) = \frac{1}{(m-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dy_{m-1} e^{-2(\theta^2 + v^2 + \dots + v_{m-1}^2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \theta^2 & y_1^2 & \dots & y_{m-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta^{2m-2} & y_1^{2m-2} & \dots & y_{m-1}^{2m-2} \end{vmatrix}^2, \quad (29)$$

as well as

$$\frac{1}{\theta} T_2(\theta) = \frac{1}{(m-1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dy_{m-1} \int_{-\theta}^{+\theta} dx e^{-(\theta^2 + x^2) - 2(v_1^2 + \dots + v_{m-1}^2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \theta^2 & y_1^2 & \dots & y_{m-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta^{2m-2} & y_1^{2m-2} & \dots & y_{m-1}^{2m-2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x^2 & y_1^2 & \dots & y_{m-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{2m-2} & y_1^{2m-2} & \dots & y_{m-1}^{2m-2} \end{vmatrix}. \quad (30)$$

3. Transformation to Oscillator Wave-Functions

In the equations (29) and (30) let us put

$$z = \theta\sqrt{2}, \quad x_i = y_i\sqrt{2}, \quad v = x\sqrt{2}.$$

As the Hermite polynomials are linearly independent, we can express the powers of the variables as linear combinations of them. Then in each row of the determinants we can retain only those Hermite polynomials whose indices are the highest. We can also take the exponentials inside. Multiplying by the proper normalization factors according to

$$u_i(x) = (\sqrt{\pi} 2^i i!)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2} H_i(x),$$

we get

$$T_1(\theta) = \frac{2^{-\frac{1}{2}(m-1)} m^{-1}}{(m-1)! \prod_{i=0}^{m-1} \{2^{-4i} \sqrt{\pi} (2i)!\}} \left| \begin{array}{cccc} u_0(z) & u_0(x_1) & \dots & u_0(x_{m-1}) \\ u_2(z) & u_2(x_1) & \dots & u_2(x_{m-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{2m-2}(z) & u_{2m-2}(x_1) & \dots & u_{2m-2}(x_{m-1}) \end{array} \right|^2, \quad (31)$$

and

$$\frac{1}{\theta} T_2(\theta) = \frac{2^{-\frac{1}{2}m-1} m^{-1}}{(m-1)! \prod_{i=0}^{m-1} \{2^{-4i} \sqrt{\pi} (2i)!\}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_{m-1} \int_{-z}^{+z} dv$$

$$\times \left| \begin{array}{cccc} u_0(z) & u_0(x_1) & \dots & u_0(x_{m-1}) \\ u_2(z) & u_2(x_1) & \dots & u_2(x_{m-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{2m-2}(z) & u_{2m-2}(x_1) & \dots & u_{2m-2}(x_{m-1}) \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{cccc} u_0(v) & u_0(x_1) & \dots & u_0(x_{m-1}) \\ u_2(v) & u_2(x_1) & \dots & u_2(x_{m-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{2m-2}(v) & u_{2m-2}(x_1) & \dots & u_{2m-2}(x_{m-1}) \end{array} \right|. \quad (32)$$

Multiplying the determinants and using the orthonormality properties of the oscillator wave functions $u_i(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_i(x) u_j(x) dx = \delta_{ij},$$

we find

$$T_1(\theta) = \sqrt{2} \frac{\mu_0}{(2m)!} \sum_{i=0}^{m-1} u_{2i}^2(z), \quad (33)$$

and

$$\frac{1}{\theta} T_2(\theta) = \frac{\mu_0}{(2m)!} \sum_{i=0}^{m-1} u_{2i}(z) \int_{-z}^{+z} u_{2i}(v) dv, \quad (34)$$

with $z = \theta\sqrt{2}$.

Eqs. (22), (27), (33) and (34) give

$$2mP\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ u_{2i}^2(z) - u'_{2i}(z) \int_0^z u_{2i}(v) dv \right\}. \quad (35)$$

Using the recurrence relation

$$\sqrt{2}u'_n = \sqrt{n}u_{n-1} - \sqrt{n+1}u_{n+1},$$

and its integral, together with $u_{2i+1}(0) = 0$, we can transform the second term in the brackets of eq. (35) to the more suitable form

$$\sqrt{2} \sum_{i=0}^{m-1} u'_{2i}(z) \int_0^z u_{2i}(v) dv = -\sqrt{2} \sum_{i=0}^{m-2} u_{2i+1}^2(z) - \sqrt{2m-1} u_{2m-1}(z) \int_0^z u_{2m-2}(v) dv.$$

Therefore the final result is

$$2mP\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \sum_{i=0}^{2m-2} u_i^2(z) + \sqrt{2m-1} u_{2m-1}(z) \int_0^z u_{2m-2}(x) dx. \quad (36)$$

4. The Limit $m \rightarrow \infty$

Equation (36) is exact. If the second term on the right hand side were absent, the problem would be exactly that of finding the density of a one dimensional degenerate Fermi-gas in a quadratic potential. We shall use this analogy to derive the limit in a simple way.

The equation satisfied by u_i is

$$\left(-\frac{d^2}{dz^2} + z^2\right)u_i = (2i+1)u_i \quad (37)$$

and therefore, classically, the Fermi-momentum for our problem is given by

$$P_F^2 = 2(2m-2) - z^2 \sim 4m - z^2, \quad m \rightarrow \infty.$$

Also, in eq. (37) we have $\hbar = 1$, so that the density of the Fermi-gas is given by

$$\delta_F(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-p_F}^{+p_F} dp = \frac{1}{\pi} \sqrt{4m - z^2} & \text{for } z^2 \leq 4m, \\ 0 & \text{for } z^2 > 4m. \end{cases}$$

Replacing the sum in (36) by this classical limit, and neglecting the second term, we get

$$2mP\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \sim \begin{cases} \sqrt{2} \frac{1}{\pi} \sqrt{4m - z^2} & \text{for } z^2 \leq 4m, \\ 0 & \text{for } z^2 > 4m. \end{cases} \quad (38)$$

which is the same as eq. (4).

One can estimate (see appendix) that the neglected term is of the order of $1/\sqrt{m}$ when $z^2 \ll 4m$. For $z^2 \gg 4m$, the function u_{2m-1} decreases exponentially. In the neighbourhood of $z^2 = 4m$ we can say nothing, as in this neighbourhood u_{2m-1} is known to be very large.

We are thankful to Dr. C. Bloch for suggesting the problem, guidance and many helpful discussions throughout the work. One of us (M. L. M.) wishes to express his thanks to the Commissariat à l'Énergie Atomique for the kind hospitality and the award of a de Broglie fellowship.

Appendix

We divide the discussion into three parts.

1) $z \gg \sqrt{2n}$

In the differential equation (37), for $i = n$, putting

$$u'_n/u_n = -\sqrt{z^2 - (2n+1)}v(z),$$

it is easily seen ⁴⁾ that $v(z)$ has an asymptotic expansion in powers of $\{z^2 - (2n+1)\}^{-\frac{1}{2}}$ starting with the constant term unity:

$$v(z) \sim 1 + \frac{a_1}{(z^2 - (2n+1))^{\frac{1}{2}}} + \dots;$$

hence

$$u_n(z) \sim A \exp \left\{ - \int^z \sqrt{x^2 - 2n - 1} dx + \dots \right\},$$

where A is a const.

2) $z \ll \sqrt{2n}$

Applying the second mean value theorem to

$$u_n = - \frac{u_n''}{2n+1-z^2},$$

we get

$$\begin{aligned} \int_0^z u_n(x) dx &= \frac{1}{2n+1-z^2} \{u_n'(\xi) - u_n'(z)\} \quad (\text{where } 0 \leq \xi \leq z) \\ &\leq \sqrt{2n+2} \{|u_{n-1}(\xi)| + |u_{n+1}(\xi)| + |u_{n-1}(z)| + |u_{n+1}(z)|\}, \end{aligned}$$

where we have used the recurrence relation

$$\sqrt{2} u_n' = \sqrt{n} u_{n-1} - \sqrt{n+1} u_{n+1}.$$

For estimating u_n , we may apply the WKB approximation or asymptotic methods ⁴⁾ to get

$$|u_n(z)|^2 \lesssim (2n+1-z^2)^{-\frac{1}{2}};$$

collecting all these, we have the result stated in the text.

3) $z \sim \sqrt{2n}$

As u_n^2 approaches in the mean to the classical limit

$$|u_n(z)|^2 \sim \pi^{-1} (2n+1-z^2)^{-\frac{1}{2}},$$

we know that $u_n(z)$ is large for $z \sim \sqrt{2n}$.

References

- 1) M. L. Mehta, Nuclear Physics **18** (1960) 395
- 2) E. P. Wigner, 4th Canadian Math. Cong. Proc. (1957) 174
- 3) P. L. Hsu, Ann. Eug. **9** (1939) 250;
D. N. Nanda, Ann. Math. Stat. **19** (1948) 47;
C. E. Porter and N. Rosenzweig, Tiedea-katemian Toimituksia
- 4) See for example N. G. de Bruijn, Asymptotic methods in analysis (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958) §§ 9.4, 9.5

ADDENDUM AND ERRATUM

In an article with the title "On the density of eigenvalues of a random matrix" (this journal, **18** (1960) 420) we estimated the dominant behaviour of the density of eigenvalues of a random matrix of order n when n is large. However, the sum of the squares of the first n oscillator wave functions can be expressed explicitly [see Bateman manuscript project, Higher Transcendental functions, ed. by A. Erdélyi (New York, Toronto, London), Vol. 2, Ch. 10, and Szegő, Orthogonal Polynomials (New York)], so that the equation (36) of our article mentioned above may be replaced by

$$2mP\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \left\{ (2m-1)u_{2m-2}^2(z) - \sqrt{(2m-2)(2m-1)}u_{2m-3}(z)u_{2m-1}(z) \right\} \\ + \sqrt{2m-1}u_{2m-1}(z) \int_0^z u_{2m-2}(x)dx.$$

As asymptotic expansions of $u_n(x)$ for n large are known [apart from those already mentioned, one may see also F. Tricomi, Ann. Mat. Pura. Appl. **28** (1949) 263, and A. Erdélyi in Golden Jubilee Commemoration volume of the Indian Mathematical Society, 1959] for all the three cases according to whether $x > \sqrt{2n}$, $x \approx \sqrt{2n}$ or $x < \sqrt{2n}$, one can get not only the "semi-circle law", but higher terms as well.

A correction to be incorporated in our article: on page 427, twelfth line from above the factor before the bracket should read as

$$\sqrt{2n+2}/2(2n+1-z^2).$$

M. L. Mehta and M. Gaudin

SUR LA LOI LIMITE DE L'ESPACEMENT DES VALEURS PROPRES D'UNE MATRICE ALÉATOIRE

MICHEL GAUDIN

Centre d'Études Nucléaires de Saclay, Gif-sur-Yvette (S. et O.), France

Reçu le 16 Janvier 1961

Abstract: The distribution function of the level spacings for a random matrix in the limit of large dimensions is expressed by means of a rapidly converging infinite product which has been used for a numerical calculation. Comparison with Wigner's hypothesis gives a very good agreement.

1. Introduction

Cet article fait suite à un travail de M. L. Mehta ¹⁾, où la fonction de distribution de l'espacement des valeurs propres d'une matrice symétrique d'ordre n , à coefficients aléatoires, est donnée explicitement. Adoptant les hypothèses de Mehta, dont nous désignerons l'article par (M), nous nous proposons ici de donner la forme limite de cette distribution lorsque n augmente indéfiniment. L'expression obtenue dérive d'un produit infini rapidement convergent, ce qui nous a permis de présenter une table de valeurs numériques dans tout l'intervalle utile. La comparaison avec la fonction de Wigner ²⁾ $p_W(S)$ pour la densité de probabilité d'un espacement S , montre que celle-ci diffère de moins de 5 % de la fonction exacte pour $S/D < 2$, et constitue donc une excellente approximation dans la région où cette fonction n'est pas très petite.

2. Formules de Base

Nous reprenons les notations de (M). La fonction $P(\theta_1, \theta_2)$ (voir (M), § 5) est la densité de probabilité d'observer tel niveau en θ_1 et tel autre en θ_2 , sans aucun niveau dans l'intervalle θ_1, θ_2 . Dans la région où la densité de niveaux est constante et égale à $D^{-1} = 2\sqrt{n}/\pi$, il est plausible que $P(\theta_1, \theta_2)$ ne dépende que de l'espacement $S = \theta_2 - \theta_1$. Il a donc suffi de considérer $P(-\theta, \theta)$, que la formule (M.48) donne sous la forme suivante:

$$P(-\theta, \theta) = \frac{(2m-2)!}{\mu_0} \frac{d}{d\theta} (e^{-2\theta^2} R_1(\theta)), \quad (1)$$

avec

$$R_1(\theta) = \frac{2^{m-1}}{(m-1)!} \int_{\theta}^{\infty} dy_1 \dots \int_{\theta}^{\infty} dy_{m-1} e^{-2(y_1^2 + \dots + y_{m-1}^2)} \prod_i (y_i^2 - \theta^2)^2 \prod_{i < j} (y_i^2 - y_j^2)^2, \quad (2)$$

3.7. COURANT j AU 3-ÈME ORDRE EN π . — Il suffit de développer la formule (14) au troisième ordre en π ,

$$ij = \int d^4\tilde{p} \operatorname{tr} \frac{1}{p-m+iD} i\pi\gamma_5 \frac{1}{p-m+iD} i\pi\gamma_5 \frac{1}{p-m+iD} i\pi\gamma_5 \frac{1}{p-m+iD} \gamma \quad (48)$$

pour obtenir le terme dominant (au 6-ème ordre de perturbation)

$$ij = -i^3 \int \frac{d^4\tilde{p}}{(p^2 - m^2)^4}$$

$$\operatorname{tr}(p+m+iD)\pi(p-m+iD)\pi(p+m+iD)\pi(p+m+iD)\gamma\gamma_5$$

soit

$$j_\lambda = 4m \int \frac{d^4\tilde{p}}{(p^2 - m^2)^4} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \{ \pi D_\mu \pi D_\nu \pi D_\rho - D_\mu \pi^2 D_\nu \pi D_\rho + D_\mu \pi D_\nu \pi^2 D_\rho \pi - D_\mu \pi D_\nu \pi D_\rho \pi \}$$

et enfin

$$j_\lambda = \frac{1}{24\pi^2} \left(\frac{i}{m} \right)^3 \{ \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} [D_\mu \pi] [D_\nu \pi] [D_\rho \pi] + ([D_\mu \pi], \pi F_{\lambda\mu}^* \pi) \} \quad (49)$$

expression évidemment similaire à celle du courant de Goldstone et Wilczek [5], mais seule subsiste ici l'invariance diagonale du fait du choix $\sigma = 0$, et aussi $A = 0$. En l'absence du champ chiral $\sigma + i\pi$, il suffirait en principe d'utiliser l'équivalence (modulo l'anomalie due à la mesure fermionique) [6] du modèle σ au couplage vectoriel-axial ($m = 0$, $\varphi = m_0(\sigma + i\pi) = uv^+$; $A^R = B + A = u^+ \partial u$, $A^L = B - A = v^+ \partial v$) et de calculer le courant au troisième ordre. Ceci nous ramène à un point qui n'a pas été abordé en 3.1 car il dépasse la simple application de l'algorithme.

Si l'on veut établir une expression définie du courant du 3-ème ordre à partir de la donnée perturbative formelle (15), il faut faire appel à une régularisation plus fine que le processus soustractif Σ' qui évacue l'information. Se pose donc la question d'une représentation intégrale analogue à (15), mais finie et invariante (l'invariance n'est assurée par le théorème de la section 2 que pour la partie "divergente" calculée en 3.1). D'abord il suffit d'introduire une coupure en $-p^2 = M^2$ dans l'intégration euclidienne pour définir celle-ci. Ensuite, on constate le fait suivant : si l'on ajoute à l'expression (15) un courant complémentaire *ad hoc* défini par l'intégrale de surface

$$\left(j_\lambda^{R,L} \right)_s = \frac{1}{3} \int_{-p^2 < M^2} d^4\tilde{p} \frac{\partial}{\partial p_\lambda} \operatorname{tr} \left(\frac{1}{p-m} D^\nu \right)^3 \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \quad (50)$$

il en résulte que seule reste non-invariante la partie en ε , le reste dérivant du Lagrangien (29) pour la partie finie, et du Lagrangien (25) pour le terme en $\log \frac{M^2}{m^2}$. La seule partie non-invariante qui découle de l'algorithme *ad hoc* (23) + (50) est l'opérateur dérivatif

$$\left(j_\lambda^R \right)_{noninv.} = -\frac{1}{12\pi^2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} D_\mu^R D_\nu^R D_\rho^R . \quad (51)$$

Une fois soustrait (51) de (23) + (50), on obtient un courant invariant qui, pour la partie en ε qui nous concerne, s'écrit

$$\begin{aligned} j_\lambda &= \dots + \frac{1}{12\pi^2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \left\{ 2A_\mu A_\nu A_\rho + \frac{3}{2} [D_\mu D_\nu] A_\rho + \frac{3}{2} A_\rho [D_\mu D_\nu] \right\} \\ j_\lambda^{(5)} &= \dots + \frac{1}{12\pi^2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \{ [D_\mu A_\nu] A_\rho + A_\rho [D_\mu A_\nu] \} , \end{aligned} \quad (52)$$

où les points désignent le terme dérivant de (29). Enfin, l'on vérifie les identités

$$\left(j^{R,L} = \frac{1}{2} \left(j \pm j^{(5)} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} [D^R \cdot j^R] &= m\rho_5 - \frac{1}{8\pi^2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} D_\lambda^R D_\mu^R D_\nu^R D_\rho^R \\ [D^L \cdot j^L] &= -m\rho_5 + \frac{1}{8\pi^2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} D_\lambda^L D_\mu^L D_\nu^L D_\rho^L \end{aligned} \tag{53}$$

où ρ_5 est donnée par l'expression (28), et où le terme supplémentaire en ε est précisément cette partie de l'anomalie due au jacobien des fermions. La formule de Goldstone-Wilczek s'obtient alors de (52) en prenant les champs $A^{R,L} = B \pm A$ comme des jauges pures ; par exemple si $A^L = 0, A^R = u^+ \partial u,$

$$\begin{aligned} j_\lambda &= -\frac{1}{24\pi^2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} A_\mu^R A_\nu^R A_\rho^R \\ j_\lambda^{(5)} &= 0 . \end{aligned} \tag{54}$$

3.8. ANOMALIE EN DIMENSION QUELCONQUE. — La formule (15) s'étend naturellement à toute dimension Q , en introduisant l'algèbre de Clifford convenable (d'ordre 2^Q). La densité ρ_{Q+1} contient le terme d'anomalie proportionnel à m^{-1}

$$\rho_{Q+1}(x) = -\frac{1}{i^Q} \int \frac{d^Q p}{(2\pi)^Q} \text{tr} \left(\frac{1}{p-m} D_x \right)^Q \frac{1}{p-m} \gamma_{Q+1} \tag{55}$$

où l'on a écrit D pour γD . On se restreindra par simplicité au cas de vecteur axial nul, $A = 0$. Pour une dimension paire, avec la métrique de Lorentz, on a

$$Q = 2q, \gamma_{Q+1} = -i^{q+1} \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{2q-1} ; \text{tr } 1 = 2^q ; \gamma_{Q+1}^2 = 1 \tag{56}$$

et

$$\rho_{Q+1} = (-)^q \int \frac{d^Q p}{(2\pi)^Q} \frac{1}{(p^2 - m^2)^Q} \text{tr} (D(p+m))^{Q-1} D \gamma_{Q+1} . \tag{57}$$

Le seul problème est de calculer la trace, ce qu'on fait commodément en introduisant l'algèbre γ' de dimension $(Q+1)$ et la transformation canonique

$$\gamma' = \frac{1}{i} \gamma \gamma_{Q+1} , \quad \gamma_{Q+1}' = \gamma_{Q+1} \tag{58}$$

On écrit alors

$$\text{tr} = \text{tr} (\gamma' \cdot D (\gamma' \cdot p + m))^{Q-1} \gamma' \cdot D \gamma_{Q+1} = \frac{1}{i} ((\gamma \cdot \mathbf{D}) (\gamma \cdot \mathbf{p}))^{Q-1} \gamma \cdot \mathbf{D}$$

avec

$$\gamma \cdot \mathbf{p} = \gamma \cdot p + im \gamma_{Q+1} \quad \mathbf{p} = (p, m), \quad \mathbf{D} = (D, 0) \tag{59}$$

La trace porte sur un nombre impair de matrices γ , mais la dimension est impaire. Elle se décompose en systèmes de contractions usuels multipliés par tout déterminant formé sur $Q+1$ vecteurs. Les seuls non-nuls sont formés sur Q vecteurs \mathbf{D} et un seul \mathbf{p} ; on en déduit

$$\text{tr} = \frac{1}{i} (\mathbf{p}^2)^{q-1} \cdot im \text{tr} (\gamma \cdot D)^Q \gamma_{Q+1} \cdot (-)^{q-1}$$