Jamel Ghanouchi

Bric-à-brac mathématique

Essais, jeux et fictions autour des maths

Edilivre

J'ai toujours tenu l'esprit pour supérieur à la matière. Cela peut paraître absurde de le dire tant il est dérisoire de prôner le contraire. A mon sens, cette position est une donnée de naissance pour tout le monde. Ainsi, il ne me viendrait pas à l'esprit qu'un homme ou une femme préfère se prévaloir de la beauté physique et de ses prérogatives, par exemple, plutôt que de vouloir jouir d'un esprit qui se distingue par sa finesse, son imagination, son inventivité ou son intelligence. Cela étant entendu, je ne vais pas traîner plus longtemps, je vais vous mettre dès maintenant au parfum de ce livre. Une question ! Quelle est selon vous la plus grande prouesse dont un cerveau puisse être l'auteur ? Est-ce d'être l'inventeur de la plus belle théorie scientifique ? Est-ce d'écrire le plus grand chef d'œuvre ? Oui, il y a de cela, mais encore ? Est-ce de composer le plus beau morceau de musique de tous les temps ? Tout cela est-il vraiment objectif ? Par exemple, il y aura toujours des gens pour préférer Bach à Mozart et vice-versa, ou qui admireront un chanteur de rock and roll à succès plutôt qu'un chanteur d'opéra. Rendons-nous à l'évidence : il n'y a pas consensus. La plus grande invention de tous les temps n'est pas la même selon que l'on soit musicien, littéraire ou mathématicien…

Arrêtons-nous un moment. Je vais vous aiguiller, lecteurs, sur mon intention véritable en écrivant ce livre. Voilà, ceci est un traité de mathématiques et pas n'importe lesquelles ! Comme personne n'est parfait, vous êtes en train de lire un livre sur les nombres. Plus précisément, sur la théorie des nombres. Mais pas seulement et vous comprendrez pourquoi je dis cela. Les plus initiés d'entre vous savent que les mathématiques englobent ce concept important qui en est un peu le fil rouge. Ou plutôt, toutes les branches des mathématiques peuvent se rapporter à ce concept qu'est le nombre. Car avec les nombres, on peut faire de la géométrie, de l'analyse, de l'algèbre, de la physique voire de la chimie. Tout peut être ramené à des équations en x et y. Le tout est de savoir s'y prendre. Procédons par étapes : qu'est-ce qu'un nombre ? A vrai dire, personne ne peut définir objectivement, formellement les nombres. Tentons une définition ! C'est le cardinal d'un ensemble, c'est-à-dire : sa quantité d'éléments. Et tout se confond dans les tautologies, car il faudra alors définir l'ensemble, la quantité. Le cardinal d'un ensemble peut définir le nombre qui est un concept abstrait, arrêtons-nous à ce niveau. Par exemple, le cardinal d'un ensemble de mille fusées est mille ! Celui de l'ensemble vide est un nombre mystérieux, étrange entre tous : le zéro ! Mais, le cardinal n'est pas une définition définitive du nombre, car de quel ensemble i, e ou π sont-ils les cardinaux ? A vrai dire, la théorie des nombres s'occupe essentiellement des entiers, nous nous y cantonnerons donc, sans trop aborder le terrain de l'algèbre avec son i, de l'analyse avec son e et de la géométrie avec son π.

Etrange monde au demeurant que celui des nombres ! Etrange, incompréhensible, intangible, insaisissable comme le temps, mais néanmoins intuitif. Dans ce monde, règne une évidence : les nombres 1, 2, 3… sont différents ! Qui oserait prétendre qu'ils sont égaux ? Qu'on impose d'ingérer cent plats de couscous en une seule fois à celui qui prétendrait que cent égale un ! Nous y voilà : L'égalité ! A vrai dire, être capable de discerner deux pommes de cent pommes ne signifie pas que deux est différent de cent, pas tout à fait tout du moins. Car cent est le cardinal d'un ensemble de cent pommes alors que, sans l'unité, nous nous trouvons confrontés à la plus terrible des réalités (une irréalité, en fait) : une abstraction ! C'est dans notre définition du nombre que le bât blesse. Je vais vous raconter une anecdote. Un jour, j'ai participé avec un peu trop de zèle à une discussion dans un forum de maths. L'un des intervenants, excédé, finit par m'apostropher ainsi : « Tu te crois malin ? Alors, fais la plus grande découverte de tous les temps ! ». Quelle était donc celle-ci aux yeux de mon correspondant qui se targuait d'être spécialiste en logique mathématique ? Rien moins que de prouver avec la plus grande rigueur qu'une assertion fausse est vraie ! Mais c'est contradictoire, me direz-vous. Oui, ça l'est ! Mais à l'intérieur du formalisme mathématique le plus rigoureux, il y a une possibilité que deux assertions vraies se contredisent. Pour une raison bien simple : les mathématiques sont construites avec des axiomes, si l'un des axiomes est mal choisi, l'édifice entier s'écroule ! Ou plutôt, si deux axiomes d'une théorie se contredisent, la théorie ne sera pas cohérente. Mais est-ce tout ? Pas tout à fait ! On n'a pas formalisé rigoureusement le concept de nombre et prouver rigoureusement que tous les nombres sont égaux entre eux est strictement équivalent au défi que m'a lancé le logicien. Encore faut-il que ce soit possible ! Par quel moyen y arriver si cela est possible ? Il y a trop de si et on n'y arrive pas de cette façon. Il faut faire intervenir ce qu'on appelle en mathématiques : l'incomplétude. Mais nous n'en sommes pas là ! Démontrer que les mathématiques sont incomplètes demande beaucoup d'adresse et de talent, cela demande un peu l'intervention divine ! Comme on peut l'entre-apercevoir dans les nombres univers.

Les nombres univers

- **Je voudrais faire connaître une notion de théorie des nombres qui me semble devoir être connue de toutes et tous : celle de nombre univers. Qu'est-ce qu'un nombre univers ? Pour répondre à cette question, je vais en construire un. Ecrivons zéro**

puis une virgule, ou un point selon la convention anglo-saxonne. Puis, juste après la virgule, écrivons les nombres de un (1) jusqu'à l'infini (un, puis deux, puis trois, etc…). Nous obtenons : 0.123456789101112131415161718192021… etc… Maintenant, si l'on prend une suite, finie cette fois-ci, de nombres : par exemple, 76489632418600980054 ou ta date d'anniversaire, la mienne, ton numéro de carte d'identité, le mien, ou toute autre suite de chiffres, quelle que soit sa longueur à condition que celle-ci soit finie, eh bien, on la trouve à un ou plusieurs endroits dans le nombre défini plus haut ! On dit que ce nombre est un nombre univers ! On peut même prouver qu'un nombre univers contient une infinité de fois n'importe quelle suite finie ! Le nombre univers que j'ai défini plus haut n'est pas le seul nombre univers, il y en a beaucoup, il y en a même une infinité ! Dans un autre registre, on ne l'a pas prouvé rigoureusement, et c'est un problème ouvert qui peut rapporter un million de dollars à celui qui le prouve et les plus grands honneurs et la gloire : les nombres π (lettre grecque), e (le nombre d'Euler du nom du plus grand mathématicien de tous les temps Leonard Euler), log (2), etc… sont aussi des nombres univers. Penchons-nous sur cette propriété des nombres univers de contenir n'importe quelle suite finie de chiffres ! Soit une langue : le français, l'arabe,

l’anglais, voire le chinois, le japonais… Cette langue s’écrit avec un alphabet : le français compte 26 lettres dans son alphabet, l’arabe 28… Si la langue n’a pas d’alphabet, on peut faire une translittération ou tout autre procédé qui la munit d’un alphabet : ainsi fait, le coréen compte 72 lettres, ce qui est un record ! Bon, c’est fini, c’est le plus important ! Faisons correspondre à n’importe quelle lettre un nombre en commençant par zéro, puis un puis deux etc… Nous obtenons ainsi un alphabet de nombres. Pour le français les 26 nombres de zéro à vingt-cinq. Pour l’arabe les 28 nombres de zéro à vingt-sept… Une écriture comporte quelques autres conventions comme la ponctuation : ces conventions sont en nombre fini ! Ajoutons les nombres suivants : par exemple pour la langue française : l’espace entre deux mots est 26, la virgule est 27, le point est 28 etc… Nous disposons ainsi d’une liste de nombres finis qui permet de traduire n’importe quel texte fini de n’importe quelle langue en nombres ! Or un livre, quel qu’il soit, est un texte de ce type ! Il n’est pas infini et il comporte une suite finie de nombres. Or, n’importe quel nombre univers compte une infinité de fois n’importe quelle suite finie, donc il contient une infinité de fois n’importe quel livre, n’importe quel texte de n’importe quelle langue ! J’ai écrit 28 ouvrages, ils existent tous dans n’importe quel nombre univers ! Tout comme n’importe quel ouvrage de Leon Tolstoï, ou de Victor Hugo… Les nombres existaient avant nous, avant l'humanité, avant le big bang, avant le commencement des temps, on peut le prouver : Par exemple, au départ, on peut dire qu'il n'y avait rien ! Le nombre d'éléments de l'ensemble vide est zéro, bien entendu ! Donc, au commencement, il y avait un nombre au moins, c'est zéro ! Or en énumérant cet ensemble vide, j'ai utilisé un deuxième nombre : le 1 ! Puisqu'il y avait au commencement un nombre qu'est le zéro ! Du coup, on se retrouve avec deux nombres : le 0 et le 1 ! Or, là encore, j'utilise un nouveau nombre en énumérant ces nombres 0 et 1, c'est le 2 ! Et, là, on a trois nombres : 0, 1, 2. Donc, aussi : 0, 1, 2 et 3… Et ainsi de suite ! L'ensemble de tous les nombres existait donc au commencement des temps et, nous l'avons démontré, même avant ! Il y avait tous les nombres, y compris les nombres univers ! Or les nombres univers contiennent en eux tous les livres, écrits, à écrire, ou qui ne seront jamais écrits ! Dans cette liste de livres, il y a « notre dame de Paris » avec une lettre en moins, avec deux lettres en plus, il y a ses suites (qui n'ont jamais été écrites !), il y a les livres sacrés, tous, sans exception, même ceux auxquels on a ajouté d'autres livres au milieu et que nous ne connaissons pas ! Comme je crois en Dieu, je sais que, parmi l'infinité de livres sacrés se trouvant dans n'importe quel nombre

univers, il en a choisi un seul (ou deux ou trois selon la foi de chacun) qui traduise Sa Divine Parole ! Ce que je viens de dire ne contredit donc nullement les écritures ! Et le texte que j'écris se trouve une infinité de fois dans le nombre : 0.12345678101112l3… depuis la nuit des temps ! Or il a été prouvé que contrairement à l'écriture, compter est congénital, donc tous les livres de l'univers sont en nous, étaient en nous avant même notre naissance ! A méditer bien sûr ! Et cette notion peut avoir des répercussions jusque dans notre conception de Dieu. ***Car il y a un moyen d'échapper au paradoxe, c'est d'admettre qu'au départ il existait un seul nombre : le 1 !*** Il ne suffit pas de croire, d'ailleurs, il y a un véritable travail de la raison qui doit être accompli… Il y a un travail sur soi-même à faire pour échapper à l'emprise de la peur de cet Etre Infini qui contrôle tout et punit des humains fautifs… En vérité, je vous le dis, Dieu n'a pas besoin d'écrire des livres pour s'exprimer. C'est le recours aux mathématiques qui m'a mis sur la voie d'une vérité possible : Il existe une infinité de livres sacrés ! Tous consignés dans l'infinité de nombres univers ! Le jour où nous aurons, grâce aux mathématiques, à l'informatique et aux machines, accès à quelques uns d'entre eux, nous serons libérés du dogme et libérés de la peur. Nous pourrons alors comprendre le sens de notre existence sur Terre et ailleurs. Oui, l'humain peut répondre à des questions comme « Pourquoi suis-je ? D'où est-ce que je viens ?

Où vais-je ainsi ? » Ce ne sont pas là des questionnements vains, ils ont été à l'origine de la philosophie rationaliste…

Les livres infinis

Il y a différentes façons de mêler les chiffres et les lettres, une infinité en fait, c'est-à-dire autant qu'il y a de nombres. J'ai expliqué dans la première partie intitulée « les nombres univers » que les nombres, en particulier les nombres univers tels que π, e… ou logarithme de 2, contenaient en fait tous les livres écrits ou à écrire et ceux qui ne le seront jamais, mais est-ce si sûr ? Cette bibliothèque que sont les nombres univers est-elle universelle ? N'y a-t-il pas un livre sensé infini dans l'univers ? En fait, les langues contenant un nombre fini de mots, ce sont toutes les vies de tous les humains qui sont effectivement consignées dans les nombres univers. Cette fois-ci, je voudrais poursuivre cette ballade dans les nombres et les lettres pour transgresser les limites du vivant et explorer un livre infini, un livre qui ne peut se lire, ne fut-ce que pour le manque d'intérêt qu'il présente (autre que mathématique évidemment). Presque tout le monde a joué aux jeux de lettres comme le scrabble et les ont appréciés. Pourtant, peu de personnes ont eu l'idée de généraliser ces jeux à l'infini comme je vais proposer de le faire. Voici une piste ! Prenons un alphabet, par exemple l'alphabet de la langue française. La première lettre de cet alphabet est la A, donnons à A la valeur 1. La deuxième lettre est le B, donnons à B la valeur 2. Procédons ainsi jusqu'à Z qui aura la valeur 26. Donnons-nous un nombre compris entre 50 et 150, par exemple : 97. Saurez-vous trouver un mot, peu importe sa longueur, dont la somme des valeurs des lettres soit égale à 97 ? Si vous n'y arrivez pas, vous pouvez approcher la cible 97… Bon, c'est déjà pas mal, mais pourquoi s'arrêter là ? Donnons à A une valeur quelconque cette fois-ci, à condition qu'elle soit comprise entre 1 et 26. Puis à B une valeur différente de celle de A toujours comprise entre 1 et 26. Et ainsi de suite. Nous avons ainsi numérisé l'alphabet. Fixons-nous une cible comprise entre 50 et 150, par exemple 103 et donnons-nous comme objectif de trouver au moins un mot (ou plusieurs) dont la somme des valeurs des lettres est cette cible, sinon qui s'en approche au maximum. Ce jeu ne s'épuise pas ! Il y a des milliards de milliards de milliards de parties possibles ! Plus riche que le jeu des chiffres et des lettres avec l'avantage d'utiliser des mots de toutes les longueurs ! Pour faire concurrence au scrabble, donnons-nous un plateau, une grille de 25 x 25 cases. Et fixons-nous comme objectif de placer nos mots, avec l'alphabet numérisé et la cible, dans la grille, rien de plus facile ! Il y a des milliards de milliards de parties différentes. Nous pouvons nous astreindre à quelques mots ou remplir toute la grille ! Nous pouvons jouer seuls ou en duplicate. Réfléchissons maintenant : nous savons numériser l'alphabet, savons-nous faire l'inverse ? En particulier, car il y a une infinité de possibilités, posons-nous des limites. Les nombres sont en nombre infini et ils ont des noms. Par exemple 1 s'écrit UN. Il commence par U. 2 (Deux) commence par D. Quelqu'un peut-il répondre à la question suivante : quel est la liste des nombres selon l'ordre alphabétique croissant ? Je vais répondre : il faut exclure A et B, aucun nombre ne commençant par ces lettres : CENT est le premier nombre par ordre alphabétique. Le deuxième est CENT CINQ (105), puis (105000) CENT CINQ MILLE, et ainsi de suite. La liste ne finit pas : cette liste de mots est infinie car les nombres sont en quantité infinie. Ainsi, il existe au moins un livre que ne contiennent pas les nombres univers, c'est celui de la liste des nombres écrits par ordre alphabétique ! Ce livre ne risque pas d'intéresser les amateurs d'intrigues policières ! Mais il a un avantage certain, c'est un livre infini ! Question à 1000000 de dollars : quel est le dernier nombre de cette liste si tant est qu'il y ait un dernier nombre dans une liste infinie ? Ne cherchez pas, je vais répondre pour vous, c'est un nombre unique dont l'invention est aussi précieuse que celle de la théorie de la relativité généralisée, que celle de la roue et de l'écriture positionnelle : c'est ZERO (0) ! Ce nombre ne finira pas de nous étonner décidément, surtout si l'on apprend que dans la langue espagnole, ce n'est pas le dernier de la liste, mais bien le premier (cero) !

Changeons de sujet et revenons au début, les nombres se rangent-ils dans des catégories ? La genèse des nombres ressemble à s'y méprendre à celle du savoir humain tout court. Au début, l'homme vivait au bord d'un fleuve et ne s'aventurait pas loin de ses rivages et il ne voyageait que dans un seul sens. C'est comme cela que l'on peut voir les entiers naturels. Puis un jour, il a exploré l'autre sens, c'est la découverte des entiers négatifs et les nombres sont devenus des entiers relatifs. Après cela, l'homme a fondé des comptoirs tout au long du fleuve, des nombres qui ne sont pas entiers, mais qui sont les quotients de deux entiers relatifs ou nombres rationnels. Enfin, l'humain fait la découverte qui lui semble ultime : il remplit les vides entre les rationnels par des nombres irrationnels, c'est la naissance de ce que l'on appelle les nombres réels. Mais ça ne s'arrête pas là ! Loin s'en faut ! Pourquoi ne pas s'aventurer loin du fleuve ? Ce voyage à l'intérieur des terres est fait par l'Italien Girolamo Cardano au XVIème siècle qui invente les nombres complexes. Enfin, plus rien n'arrête l'aventure humaine : nous voilà dans l'espace à trois puis à quatre, cinq dimensions : ce sont les quaternions, octonions, etc… Nous allons voir cela plus en détail tout de suite. On distingue en fait différents types de nombres que voici :

Nombre entier naturel

En mathématiques, un nombre entier naturel est positif ou nul et permet de compter les éléments d'un ensemble, comme nous l'avons vu. Un nombre entier peut s'écrire avec une suite finie de chiffres sans signe et sans virgule (on peut à la limite écrire ce nombre avec une virgule suivie de zéros, mais ce nombre n'est plus un entier). Les entiers naturels sont donc ceux que l'on commence à compter ainsi : un, deux, trois, quatre… La liste des entiers naturels est donc infinie, chacun d'entre eux ayant un entier qui lui est supérieur d'une unité que l'on appelle successeur. L'arithmétique est l'étude des entiers naturels et de leurs relations, avec les opérations d'addition, de multiplication, de division et de soustraction. On dit ainsi que la soustraction est l'opération réciproque de l'addition et vice-versa et celle de la division la réciproque de la multiplication et vice-versa. On peut également relier la multiplication à l'addition en définissant la multiplication d'un entier naturel a par un autre b comme étant l'addition de a, b fois. Nous avons parlé des axiomes, l'axiomatisation de l'ensemble des entiers naturels a commencé au XIX$^{\text{ème}}$ siècle avec les mathématiciens Italien Peano et Allemand Richard Dedekind. On note cet ensemble avec la majuscule N, le premier trait de cette lettre étant dédoublé.

Nombre entier relatif

En gros, si on ajoute un signe, plus ou moins, devant un entier naturel, il devient relatif. Remarquons que zéro est neutre, qu'il est le même avec plus ou moins. On définit un entier avec un signe moins comme étant l'opposé de cet entier et vice versa. On peut avoir une idée de l'invention des entiers relatifs comme suit. Si on achète chez un marchand pour plus que l'on ne possède, le bilan est négatif et l'avoir à sa disposition est une quantité négative d'argent. On peut utiliser toutes les opérations de l'arithmétique avec les nombres entiers relatifs, mais il ne faut jamais oublier que la multiplication et la division de deux nombres négatifs est une quantité positive.

L'ensemble des entiers relatifs est noté avec un Z majuscule avec le trait oblique dédoublé. Par convention, Z avec un signe moins désigne l'ensemble des entiers négatifs, celui des entiers positifs étant N.

Les nombres rationnels

Un nombre rationnel est le quotient de deux entiers relatifs. On le note a/b ou avec une barre horizontale. Il est bien entendu que b ne doit pas être nul, la division d'un nombre non nul par zéro étant impossible dans l'ensemble des nombres rationnels. Celui-ci est noté Q avec une majuscule et un trait dans la courbe gauche de cette lettre. Le nombre au-dessus de la fraction est dit numérateur et celui du dessous dénominateur. Lorsque le résultat de la division de a par b n'est pas un entier, nous avons affaire à une fraction irréductible et les deux nombres sont dits premiers entre eux. Un nombre premier est un nombre que ne divise aucun nombre autre que lui-même et 1. On peut aussi écrire un entier rationnel comme un entier suivi d'une virgule (ou un point) suivi d'une suite d'entiers. Cette suite est toujours périodique.

Les nombres réels

Lorsque a que divise b est un nombre dont la partie décimale n'est pas périodique, il est dit irrationnel. Il semblerait que le mathématicien Français René Descartes ait été le premier en 1637 déjà à avoir utilisé cette appellation de nombres réels pour les distinguer des nombres imaginaires. L'ensemble des nombres réels est celui des nombres rationnels et irrationnels, il englobe donc celui des rationnels. Il est noté R avec une majuscule avec le trait vertical dédoublé. Il n'est pas toujours évident de montrer qu'un nombre peut intervenir dans un problème qui a perturbé l'humanité durant des milliers d'années. Ainsi, on a longtemps cherché la quadrature du cercle jusqu'à ce que l'on se rende compte qu'elle était impossible et ce grâce aux nombres, car π (pi) qui intervient dans la preuve se trouve dans l'expression de la surface et du périmètre d'un cercle et s'est avéré être non algébrique (ou transcendant), c'est-à-dire qu'il n'est pas solution d'une équation polynomiale. Voici quelques anecdotes concernant π, en particulier, et les nombres réels, d'une manière générale.

Le nombre π possède des décimales qui se suivent de manière aléatoire. C'est une constante mathématique présente dans de nombreuses équations. Observez le ciel, par exemple, la répartition (statistiquement aléatoire) de la position des étoiles donne une approximation de π, plus exactement la valeur $6 / \pi^2$.

Le premier mathématicien à avoir donné des *décimales exactes de π est Archimède de Syracuse. Il a obtenu 3,141. Sa méthode est celle de l'encadrement d'un cercle par une succession de polygones réguliers aux côtés en nombre croissant. Al Kashi (XIVème siècle) est le premier à trouver plus de dix (seize exactement) décimales exactes de π.*

En 1998 (depuis ce record a été battu), le professeur Yasumasa Kanada de l'Université de Tokyo a déterminé après de nombreuses heures de calculs sur plusieurs ordinateurs les 51 premiers milliards de chiffres grâce à la formule d'Euler qui est la suivante :

$\pi = 2\ (1 + 1/3 + 1.2/3.5 + I.2.3/3.5.7 + 1.2.3.4/3.5.7.9\ldots)$.

Il est avéré que π est irrationnel (démontré par le mathématicien Lambert en 1766), transcendant (démontré en 1882 par le mathématicien Van Lindemann), un nombre univers (il existe dans π forcément une séquence où il y a votre numéro de téléphone, une autre où il y a le mien etc..), normal au sens qu'à donné à ce mot le mathématicien Pier Martin-Lof (Un nombre est dit normal si tous ses chiffres, pris un par un, tous les couples de deux chiffres, ceux de trois chiffres, quatre, etc.. apparaissent avec la même fréquence dans la suite qui les compose) en fait n'ayant prouvé la normalité que pour les 100 milliards de décimales connues de π (environ, ce nombre ne cesse de grandir), on dira que nous n'avons pas une preuve irréfutable de sa normalité.

Les nombres complexes

Il existe un ensemble plus grand que celui des réels c'est celui qui compte en plus des réels les nombres complexes notés a+ib où a et b sont des réels et $i^2 = -1$. Les nombres de la forme ib sont appelés les nombres imaginaires purs. a est la partie réelle, b la partie imaginaire. L'ensemble des nombres complexes est noté avec un C majuscule et un trait dans l'arrondi de cette lettre. Il appartient au mathématicien Allemand Carl Friedrich Gauss d'avoir formalisé rigoureusement l'ensemble des nombres complexes. Il revient principalement au mathématicien Italien Girolamo Cardano, ainsi qu'à de nombreux autres mathématiciens tels Raphael Bombelli, Nicolo Fontana (Tartaglia) ou encore Ludovico Ferrari, d'avoir inventé les nombres complexes. Ils voulaient les utiliser comme outils pour résoudre les équations du 3ème et 4ème degrés. On les rencontre dans de nombreux champs des mathématiques mais aussi en électricité et ailleurs. Au XIXème siècle, on a fait la correspondance entre la géométrie et les nombres complexes et on a inventé le mot affixe d'un point. Si A est un point de coordonnées (a,b) son affixe est le nombre complexe a+ib. On s'est demandé pourquoi ne pas généraliser cette notation et, par extension, on a inventé les nombres suivants.

Les quaternions

Le mathématicien Anglais William Rowan Hamilton a, le premier, eu l'idée au XIXème siècle de