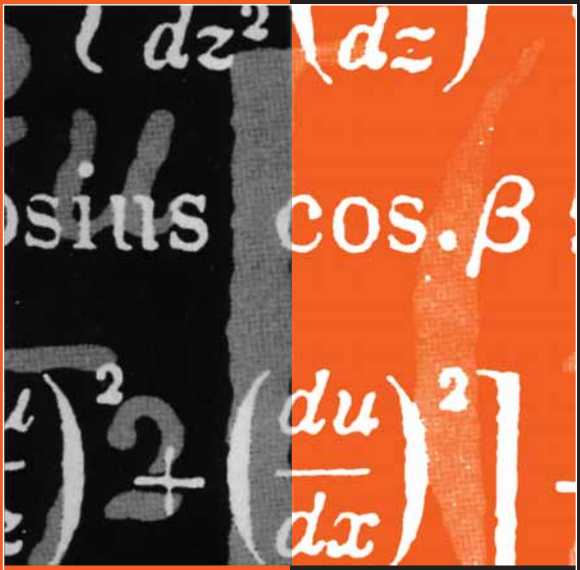
MATHÉMATIQUES

Frédéric PHAM

Intégrales singulières



SAVOIRS ACTUELS

CNRS EDITIONS

EDP SCIENCES

INTÉGRALES SINGULIÈRES

Frédéric Pham

Intégrales singulières

SAVOIRS ACTUELS

EDP Sciences/CNRS Éditions

ISBN EDP Sciences 2-86883-799-9

ISBN CNRS Éditions 2-271-06186-5

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

À maintes reprises au cours de leur histoire, la physique théorique et les mathématiques se sont rencontrées autour de grandes structures, sources de fécondité pour les deux disciplines.

Avec la formulation mathématique de la théorie quantique des champs et des particules vers 1960, l'importance des structures de fonctions holomorphes à plusieurs variables se manifeste, et les singularités complexes associées dites « de Landau » constituent tout un univers, dont l'interprétation physique fait partie du bagage conceptuel de base du physicien des particules. Ainsi la présence d'un pôle dans une variable d'énergie ou de masse signale l'existence d'une particule et les singularités de plus haute complexité manifestent la prépondérance d'une géométrie de collisions multiples relativistes classiques, incluant des créations de particules, au sein du processus d'interaction quantique.

Par ailleurs, sur le plan des mathématiques pures, on peut dire que cette branche de la physique théorique participe véritablement à la genèse de la théorie des hyperfonctions et de l'analyse microlocale. (On peut mentionner à ce propos les motivations physiques initiales de M. Sato à l'époque des « relations de dispersion », et les travaux de A. Martineau et de B. Malgrange et M. Zerner à propos du théorème du « edge-of-the-wedge », liés aux premières rencontres de Strasbourg entre physiciens et mathématiciens).

Pour le physicien mathématicien, il y a des raisons profondes à ces structures holomorphes de la théorie quantique des champs, lesquelles sont inhérentes aux grands principes de la physique quantique relativiste : causalité d'Einstein, invariance par le groupe de Poincaré, positivité de l'énergie, conservation de la probabilité ou « unitarité » etc. Cependant, c'est dans l'approche appelée « théorie des perturbations » de la théorie quantique des champs (approche dont le rapport à la théorie des champs « complète » ou « non-perturbative » est comparable à celle des séries formelles par rapport à l'étude des séries convergentes) que les structures holomorphes génératrices de singularités de Landau apparaissent sous leurs formes élémentaires : il s'agit des fonctions holomorphes définies par des intégrales de fonctions rationnelles associées aux « diagrammes de Feynman ».

Ce fut le mérite de Frédéric Pham, alors qu'il était un jeune physicien dans le Service de Physique Théorique de Saclay, d'avoir entrepris une étude systématique de ces structures mathématiques en s'appuyant notamment sur les notions développées par J. Leray dans son calcul des résidus à plusieurs variables conjointement avec le théorème d'isotopie de R. Thom. Avec son aboutissement que constituent les formules de Picard-Lefschetz, cette étude fondamentale des singularités des intégrales se situe aux confins de l'analyse et de la géométrie algébrique. Publiée en 1967 dans le Mémorial des Sciences Mathématiques (Éditeur Gauthier-Villars), elle fut suivie d'un second ouvrage en 1974 (fruit d'un cours donné à Hanoï) où les mêmes structures, enrichies par les travaux de Nilsson, sont aussi abordées par des méthodes d'équations différentielles et généralisées sous l'angle de la théorie des hyperfonctions et de l'analyse microlocale.

Une réédition de ces textes nous paraît pouvoir jouer un rôle extrêmement utile, non seulement pour le mathématicien par l'importance de son contenu et la diversité des points de vue adoptés, mais aussi pour le physicien théoricien si l'on pense notamment aux grands problèmes de fond de la théorie quantique des champs et des particules, encore non résolus à ce jour.

Notons tout d'abord que dans une approche non-perturbative de cette dernière, les méthodes développées par Frédéric Pham acquièrent une portée tout à fait générale en permettant l'étude des solutions holomorphes d'équations intégrales avec cycles variables dans des variétés complexes, équations inhérentes au formalisme général de la théorie quantique des champs (équations dites « de type Bethe-Salpeter », reliées étroitement aux relations générales d'unitarité). C'est ainsi qu'il est par exemple possible pour les collisions de particules massives décrites de façon générale par les fonctions de structure d'une théorie quantique des champs de désenchevêtrer les singularités de « seuil à trois particules », celui-ci apparaissant comme un lieu d'accumulation de « singularités holonomes » (nous référant ici à une classification des singularités des amplitudes de collision considérée par M. Sato).

Concernant ce type de structure, des problèmes extrêmement ardus restent encore ouverts dans les cas — d'importance physique considérable — où des particules de masse nulle participent aux collisions. Le type d'analyse que nous venons de décrire concerne (pour les cas de singularités ne mettant en jeu que des particules massives) des propriétés de la théorie des champs que l'on peut considérer comme indépendantes d'une autre catégorie de problèmes, d'importance cruciale, appelés « problèmes de renormalisation ». Ces derniers, apparaissant au niveau perturbatif sous la forme d'une nécessaire redéfinition d'intégrales de Feynman primitivement divergentes, ont été en fait éclairés sous un jour nouveau par les travaux récents de Connes et Kreimer, y mettant en lumière une structure d'algèbre de Hopf. Cependant, au niveau général non-perturbatif, les problèmes de renormalisation se manifestent toujours comme étant à la source même du problème d'existence des théories de champs non-triviales en dimension quatre de l'espace-temps.

Cette « difficulté existentielle », exhibée dès 1960 par Landau pour le cas de l'électrodynamique quantique dans la resommation de séries perturbatives renormalisées a pu être également présentée à un niveau plus général pour la théorie de champ scalaire la plus simple avec interaction quartique : le phénomène consiste en la production « générique », due à la renormalisation, de pôles (et autres singularités de Landau) dans une région de l'espace complexe où de telles singularités sont interdites par les grands principes. *En fait la faille existentielle de ces modèles apparaît comme reliée de façon profonde à l'absence d'une propriété importante des fonctions de structure des champs à très hautes énergies, appelée « liberté asymptotique ».*

Les théories de champs de jauge non-abéliennes, conceptuellement plus riches et plus proches également de la complexité expérimentale de la physique des particules, sont-elles en mesure, comme on peut l'espérer — du fait qu'elles sont capables d'intégrer la liberté asymptotique — de concilier la renormalisation avec les structures holomorphes fondamentales issues des grands principes de la physique quantique relativiste ? Dans l'état actuel de la physique des particules où le « modèle standard » de théorie des champs est considéré comme très fiable dans une vaste zone d'énergies, la construction et l'étude mathématique de la plus simple théorie quantique de champs de jauge non-abélienne, à savoir d'un modèle de Yang et Mills, pose un défi incontournable (ce qui lui vaut d'avoir été choisie comme l'un des sujets de grand prix de mathématique par le « Clay Institute » en l'an 2000...).

Dans ce domaine si riche de concepts que représente la théorie quantique des champs relativiste, domaine dans lequel les structures de symétries et groupes de jauge ont été les moteurs de recherche les plus récents, il semble extrêmement important de continuer à développer conjointement avec ces derniers le point de vue des structures holomorphes et singularités complexes. Or dans cette optique, le présent ouvrage nous offre une moisson de résultats dont le physicien mathématicien devrait pouvoir tirer un grand bénéfice.

Jacques Bros
(*Service de Physique Théorique, CEA Saclay*)

Première partie

Introduction à l’étude topologique des singularités de Landau

INTRODUCTION

Cet ouvrage est une mise à jour d'un travail entrepris par D. Fotiadi, M. Froissart, J. Lascoux et l'auteur, et qui a abouti à deux articles [**12, 29**][1], dont les résultats sont ici repris et complétés (sans toutefois en reprendre toutes les démonstrations). Je me suis efforcé de présenter un tout cohérent, compréhensible pour le lecteur non mathématicien : aussi de nombreux passages (dont la presque totalité des deux premiers chapitres) ne sont-ils que des rappels de notions mathématiques bien connues. Toutefois, on suppose le lecteur familier des premiers rudiments de la Topologie générale[2].

L'origine du travail est le désir de comprendre un chapitre important de la physique des interactions élémentaires, le problème des « singularités de Landau » : après les nombreux travaux suscités par l'article de L.D. Landau [**18**], ce qui frappe c'est, d'une part, l'élégance de certains résultats, tels que les « règles de Cutkosky » [**5**], le caractère universel de ces résultats, qui débordent en effet le cadre originel de la théorie des perturbations (comme Landau l'avait d'ailleurs prédit), mais d'autre part, l'extrême complexité d'un sujet dont chaque étude plus approfondie semble faire apparaître une nouvelle « pathologie ».

Nous allons voir qu'une étude systématique du problème peut être entreprise dans un cadre mathématique très général, où les « bons » résultats cessent d'être miraculeux et les « mauvais » d'être pathologiques. Le problème général est celui des propriétés analytiques de fonctions définies par des intégrales multiples : l'intégration pourra avoir lieu sur l'espace euclidien, comme dans le cas des « intégrales de Feynman » en théorie des perturbations, ou sur une sous-variété de l'espace euclidien, comme dans le cas des « intégrales d'unitarité » ; l'intégrand sera une fonction analytique, dépendant analytiquement de paramètres extérieurs complexes ; introduisant

---

[1] Les numéros entre [ ] renvoient à la « Bibliographie » page 147.

[2] Tels qu'on peut les trouver au début du petit livre de A.H. Wallace [**39**], par exemple.

aussi la « complexi-liée » de la variété d'intégration, on supposera que le lieu de singularité de l'intégrand est un *sous-ensemble analytique* de la variété complexe de *tous* les paramètres (intérieurs comme extérieurs). Ce sous-ensemble analytique se projette naturellement sur la variété des paramètres extérieurs, et l'on pourra en considérer le *contour apparent* ; on verra, grâce au « théorème d'isotopie de Thom » (chap. IV), que l'intégrale est une fonction analytique en dehors de ce contour apparent, appelé « singularité de Landau » de l'intégrale.

Ici apparaît déjà l'explication de « pathologies » constatées par les physiciens : on sait par exemple que les courbes de contour apparent dans le plan ont « génériquement » des points de rebroussement ; dans l'espace à trois dimensions, les surfaces de contour apparent présentent génériquement, outre des « arêtes de rebroussement », des singularités isolées baptisées « queue d'aronde » ; etc.

On dispose de nombreux renseignements sur les singularités présentées « génériquement » par les contours apparents, grâce surtout aux travaux de R. Thom [**36**], dont nous ne rendrons compte que de façon très superficielle.

On remarquera qu'il est question pour nous, non pas simplement de contours apparents de variétés, mais de *contours apparents d'ensembles analytiques* : pour les définir, on utilisera une « *stratification* » de l'ensemble analytique (notion introduite par H. Whitney [**42**] et R. Thom [**37**]), c'est-à-dire une partition de cet ensemble en variétés appelées « strates ». Les « relations d'incidence » entre les différentes strates seront la base d'une classification des singularités de Landau, liée à ce que les physiciens appellent la « hiérarchie des singularités ».

Après ces considérations purement géométriques, on précisera la nature des singularités de la fonction analytique que définit l'intégrale, dans le cas où le lieu de singularité de l'intégrand est une union de sous-variétés en position générale. On montrera (aux chapitres V et VII) comment le cycle d'intégration se déforme quand les paramètres extérieurs décrivent un petit lacet autour d'une singularité de Landau : c'est le problème de la « ramification de l'intégrale ». On en déduira (chap. VI) des expressions précises pour la « partie singulière » de la fonction analytique sur sa singularité de Landau, tout au moins dans l'hypothèse où l'intégrand n'a que des singularités polaires : on verra que dans ce cas l'intégrale ne peut avoir que des pôles, ou des singularités algébriques d'ordre 2, ou des singularités logarithmiques. Cette étude ne nous a d'ailleurs demandé aucune imagination, l'essentiel du travail ayant déjà été fait par J. Leray [**20**].

On s'apercevra en passant que les « règles de Cutkosky » sont une conséquence triviale des formules de « ramification » données plus haut et de la *théorie des résidus de Leray* : quelques physiciens (notamment le groupe de Polkinghorne [**13**]) avaient d'ailleurs soupçonné ce lien entre les règles de Cutkosky et le calcul des résidus, mais ils n'avaient pu l'exprimer de façon précise faute d'outil mathématique adéquat ; rappelons que les notions « homologiques », essentielles pour la théorie de Leray, ont justement été inventées par Poincaré [**30**] (1895) pour permettre la généralisation à plusieurs variables du calcul des résidus, en remédiant à notre manque d'intuition géométrique dans l'« hyperespace ».

Notre exposé sera purement mathématique, et si son intérêt pour le physicien est évident, son utilisation pratique n'est pas sans poser quelques problèmes que je vais esquisser maintenant :

D'abord, en ce qui concerne la géométrie des singularités de Landau, il est « malheureusement » facile de voir que certaines situations réalisées en physique ne sont pas « génériques » au sens de Thom. J'aborderai cette question dans ma thèse (en préparation). Disons seulement ici que ces « accidents », qui n'ont d'ailleurs rien de mystérieux, ne semblent pas créer de difficulté grave.

Un autre problème pratique est celui de la construction effective d'une « stratification » de l'ensemble analytique étudié. Pour le physicien, ce sous-ensemble est, dans l'espace euclidien affine, simplement une union de sous-variétés en position générale, de sorte que sa stratification est triviale ; malheureusement, on n'a le droit d'appliquer le théorème d'isotopie de Thom qu'à l'ensemble « *compactifié* »[(3)], ce qui pose le problème, assez compliqué semble-t-il, de la stratification « à l'infini ». Il serait important de savoir le résoudre, pour pouvoir exhiber toutes les « singularités de Landau de deuxième type » (c'est ainsi que les physiciens [**9**] appellent les contours apparents des « strates de l'infini »).

Signalons enfin le problème mathématique fondamental, où réside le principal intérêt des notions homologiques : prolonger les résultats, essentiellement locaux, obtenus ici, en des résultats *globaux*. On peut par exemple se poser la question suivante : toutes les « singularités de Landau » sont-elles effectivement singulières « quelque part » (c'est-à-dire sur au moins un « feuillet » de la fonction multiforme que définit l'intégrale) ? ce qui conduit au problème homologique suivant : le chapitre V (n° 1.2) définit une représentation du groupe fondamental de la « base » (variété des paramètres extérieurs) dans l'espace d'homologie de la « fibre » (variété d'intégration) ; comment savoir si cette représentation est *irréductible* ? Il va de soi que pour résoudre de tels problèmes, la « recette » proposée au début du paragraphe 3 (chap. III) n'est qu'un souhait pieux : cette recette n'est facile à appliquer que pour les plus simples des intégrales de Feynman (*cf.* un article non publié de D. Fotiadi et l'auteur) ; pour une intégrale de Feynman un peu moins triviale, le calcul des groupes d'homologie est à lui seul un problème difficile (*cf.* un article de P. Federbush [**11**]). Il faut reconnaître que le cadre général où l'on a posé le problème est un peu trop simpliste :

(3) Sans parler de la nécessité, pour donner un sens à l'intégrale, d'avoir une variété d'intégration compacte.

on a fait usage surtout de la structure différentiable, un peu de la structure analytique, des variétés étudiées, mais pas du tout de leur structure *algébrique*[4].

Mes remerciements vont à D. Fotiadi, M. Froissart, J. Lascoux, pour les nombreuses discussions dont ce travail est le fruit ; au Professeur J. Leray qui, avec sa « théorie des résidus », nous a fourni les idées de départ ; au Professeur R. Thom pour la gentillesse et la patience avec lesquelles il nous a guidés.

[4] Signalons deux articles récents où les notions algébriques entrent en jeu : Dans [**32**], Regge et Barucchi étudient quelques courbes de Landau par des méthodes de Géométrie algébrique ; dans [**24**], Nilsson définit, par certaines propriétés de croissance, une classe de fonctions analytiques multiformes dont le lieu de singularité est un sous-ensemble algébrique, et montre que cette classe est stable par intégration.

Enfin, l'évolution de l'utilisation de ces techniques dans la théorie de la matrice S et des intégrales de Feynman est reflétée dans les articles [**Las68, Pha68, Reg68, Reg70, BP80, Bro81, Iag81, BP83, BD86**].

Bibliographie

[And92] E. Andronikof – « Intégrales de Nilsson et faisceaux constructibles », *Bull. Soc. math. France* **120** (1992), p. 51–85.

[AVG86] V.I. Arnold, A.N. Varchenko & S. Guzein-Sade – *Singularités des applications différentiables*, Éditions MIR, Moscou, 1986 (en russe : 1982).

[Bro81] J. Bros – « Scattering in quantum field theory: the M.P.S.A. approach in complex momentum space », in *New developments in mathematical physics (Schladming, 1981)*, Acta Phys. Austriaca Suppl., XXIII, Springer, Vienna, 1981, p. 329–400.

[BD86] J. Bros & B. Ducomet – « Two-particle structure and renormalization », *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* **45** (1986), p. 173–230.

[BP80] J. Bros & D. Pesenti – « Fredholm theory in complex manifolds with complex parameters: analyticity properties and Landau singularities of the resolvent », *J. Math. Pures Appl. (9)* **59** (1980), p. 375–401.

[BP83] ______, « Fredholm resolvents of meromorphic kernels with complex parameters: a Landau singularity and the associated equations of type U in a nonholonomic case », *J. Math. Pures Appl. (9)* **62** (1983), no. 2, p. 215–252.

[Del70] P. Deligne – *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lect. Notes in Math., vol. 163, Springer-Verlag, 1970.

[Del73] ______ (éd.) – *SGA 7 II*, Lect. Notes in Math., vol. 340, Springer-Verlag, 1973.

[Fis76] G. Fischer – *Complex analytic geometry*, Lect. Notes in Math., vol. 538, Springer-Verlag, 1976.

[GGM83] A. Galligo, J.-M. Granger & Ph. Maisonobe (éds.) – *Systèmes différentiels et singularités (Luminy, 1983)*, Astérisque, vol. 130, Société Mathématique de France, 1985.

[God64] R. Godement – *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1964.

[GM88] M. Goresky & R.D. MacPherson – *Stratified Morse theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Folge 3 Band 14, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1988.

[Gro66] A. Grothendieck – « On the de Rham cohomology of algebraic varieties », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **29** (1966), p. 95–105.

[GR65] R.C. Gunning & H. Rossi – *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[Iag81] D. Iagolnitzer – « Analyticity properties of the *S*-matrix: historical survey and recent results in *S*-matrix theory and axiomatic field theory », in *New developments in mathematical physics (Schladming, 1981)*, Acta Phys. Austriaca Suppl., XXIII, Springer, Vienna, 1981, p. 235–328.

[Kan88] A. Kaneko – *Introduction to hyperfunctions*, Mathematics and its applications, Japanese series, vol. 3, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1988.

[KS90] M. Kashiwara & P. Schapira – *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 292, Springer-Verlag, 1990.

[Lam81] K. Lamotke – « The topology of complex projective varieties after S. Lefschetz », *Topology* **20** (1981), p. 15–51.

[Las68] J. Lascoux – « Perturbation Theory in Quantum Field Theory and Homology », in *Batelle Rencontres 1967* (C.M. DeWitt & J.A. Wheeler, éds.), Lectures in Mathematics and Physics, W.A. Benjamin, New York, 1968, p. 354–419.

[Mil68] J. Milnor – *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math. studies, vol. 61, Princeton University Press, 1968.

[Mor93] M. Morimoto – *An introduction to Sato's hyperfunctions*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 129, American Math. Society, Providence, RI, 1993.

[Mor01] S. Morita – *Geometry of differential forms*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 201, American Math. Society, Providence, RI, 2001.