SAVOIRS PHYSIQUE ACTUELS

INSTABILITÉS HYDRODYNAMIQUES

FRANÇOIS CHARRU

EDP SCIENCES

CNRS ÉDITIONS

François Charru

Instabilités hydrodynamiques

SAVOIRS ACTUELS

EDP Sciences/CNRS ÉDITIONS

Illustration de couverture : Instabilité de Kelvin-Helmholtz au-dessus de Laramie, Wyoming, États-Unis, entre deux couches d'air atmosphérique de vitesses différentes, révélée par la vapeur d'eau condensée de la couche inférieure. Ce phénomène peut exister en l'absence de nuage : il est alors invisible et les pilotes doivent en être avertis. © 2001 Brooks Martner, NOAA Environmental Technology Laboratory.

Imprimé en France.

ISBN EDP Sciences 978-2-86883-985-5

ISBN CNRS Éditions 978-2-271-06565-0

À mon père

Table des matières

Préface xiii

Avant-propos xv

1 Introduction 1

1.1 Espace des phases, portrait de phase 1
1.2 Stabilité d'un point fixe 3
1.2.1 Points fixes 3
1.2.2 Stabilité linéaire d'un point fixe 3
1.2.3 Stabilité d'un point fixe non hyperbolique 6
1.3 Bifurcations 6
1.3.1 Définition 6
1.3.2 Bifurcation nœud-col 7
1.3.3 Bifurcation fourche 9
1.3.4 Bifurcation de Hopf 12
1.4 Illustrations hydrodynamiques 13
1.4.1 Stabilité d'un film de savon 13
1.4.2 Stabilité d'une bulle 17
1.4.3 Stabilité d'une suspension colloïdale 21
1.4.4 Convection dans un anneau 23
1.4.5 Double diffusion thermique et massique 27
1.5 Non-normalité de l'opérateur linéarisé 30
1.5.1 Croissance algébrique transitoire 30
1.5.2 Excitation optimale d'un mode instable 34
1.6 Exercices 37
1.6.1 Oscillateur harmonique forcé 37
1.6.2 Particule dans un potentiel à deux puits 37
1.6.3 Avalanches dans un tas de sable 38
1.6.4 Transition de phase du second ordre 39
1.6.5 Transition de phase du premier ordre 39
1.6.6 Problème modèle de l'instabilité d'un film de savon . . . 40
1.6.7 Croissance transitoire et perturbation optimale 40

1.6.8 Excitation optimale d'un mode instable 41
1.6.9 Bifurcation sous-critique *via* une croissance transitoire 41

2 Instabilités de fluides au repos **43**
2.1 Introduction 43
2.2 Instabilité gravitationnelle de Jeans 44
2.2.1 Ondes acoustiques 44
2.2.2 Effet de la gravitation aux grandes échelles 47
2.2.3 Discussion 51
2.3 Instabilité interfaciale de Rayleigh-Taylor 53
2.3.1 Analyse dimensionnelle 53
2.3.2 Équations des perturbations 55
2.3.3 Linéarisation, modes normaux et relation de dispersion 59
2.3.4 Discussion 60
2.3.5 Effets des parois et de la viscosité 61
2.4 Instabilité capillaire de Rayleigh-Plateau 64
2.4.1 Description 64
2.4.2 Analyse dimensionnelle 66
2.5 Instabilité thermique de Rayleigh-Bénard 68
2.5.1 Description 68
2.5.2 Mécanisme de l'instabilité ($Pr \gg 1$) 71
2.5.3 Étude de stabilité dans l'approximation de Boussinesq 72
2.6 Instabilité thermocapillaire de Bénard-Marangoni 76
2.6.1 Description 76
2.6.2 Analyse dimensionnelle 77
2.7 Discussion 78
2.7.1 Échelles caractéristiques et sélection de modes 78
2.7.2 Caractéristiques générales d'une instabilité à seuil . . . 79
2.8 Exercices 80
2.8.1 Instabilité de Rayleigh-Taylor entre parois 80
2.8.2 Instabilité d'un film mince suspendu 81
2.8.3 Instabilité de Saffman-Taylor en milieu poreux 81
2.8.4 Instabilité de Darrieus-Landau d'un front de flamme . . 83

3 Écoulements ouverts : notions de base **87**
3.1 Introduction 87
3.1.1 Dynamique linéaire d'un paquet d'ondes 87
3.1.2 Stabilité au sens de Lyapunov, stabilité asymptotique 91
3.1.3 Stabilité et instabilité linéaires 92
3.2 Critère de stabilité linéaire 95
3.2.1 Évolution spatio-temporelle d'une perturbation générale 95
3.2.2 Illustration 97
3.3 Instabilités convective et absolue 98
3.3.1 Critère d'instabilité absolue 98
3.3.2 Branches spatiales d'une instabilité convective 99

3.3.3 Illustrations . . . 99
3.3.4 Relation de Gaster . . . 100
3.4 Exercices . . . 101
3.4.1 Dispersion d'un paquet d'ondes . . . 101
3.4.2 Branches spatiales d'une instabilité convective . . . 102

4 Instabilité non visqueuse des écoulements parallèles 103
4.1 Introduction . . . 103
4.2 Résultats généraux . . . 106
4.2.1 Équations linéarisées des petites perturbations . . . 106
4.2.2 Théorème de Squire . . . 108
4.2.3 Équation de Rayleigh des perturbations bidimensionnelles . . . 109
4.2.4 Théorème du point d'inflexion de Rayleigh . . . 112
4.2.5 Conditions de saut entre deux couches de vorticité uniforme . . . 113
4.3 Instabilité d'une couche de mélange . . . 115
4.3.1 Instabilité de Kelvin-Helmholtz d'une feuille de vorticité 115
4.3.2 Cas d'une épaisseur de vorticité non nulle . . . 120
4.3.3 Effets de la viscosité . . . 123
4.4 Instabilité centrifuge de Couette-Taylor . . . 124
4.4.1 Introduction . . . 124
4.4.2 Maurice Couette (1890) et Geoffrey Taylor (1923) . . . 125
4.4.3 Critère d'instabilité pour un écoulement non visqueux 127
4.4.4 Effet de la viscosité – Nombre de Taylor . . . 128
4.5 Exercices . . . 132
4.5.1 Instabilité de Kelvin-Helmholtz avec gravité et capillarité . . . 132
4.5.2 Effet de parois sur l'instabilité de Kelvin-Helmholtz . . . 132
4.5.3 Ondes internes dans un écoulement cisaillé stratifié en densité . . . 132
4.5.4 Instabilité de l'écoulement non visqueux de Couette-Taylor . . . 134
4.5.5 Instabilité d'un film visqueux . . . 134

5 Instabilité visqueuse des écoulements parallèles 137
5.1 Introduction . . . 137
5.1.1 Instabilité de l'écoulement de Poiseuille en tube . . . 138
5.1.2 Instabilité d'une couche limite . . . 140
5.2 Résultats généraux . . . 142
5.2.1 Équations linéarisées des perturbations . . . 142
5.2.2 Théorème de Squire . . . 143
5.2.3 Équation d'Orr-Sommerfeld . . . 145
5.2.4 Mécanisme de l'instabilité visqueuse . . . 148
5.3 Écoulement de Poiseuille plan . . . 150

5.3.1 Stabilité marginale, modes propres . . . 150
5.3.2 Étude expérimentale pour de petites perturbations . . . 151
5.3.3 Croissance transitoire . . . 156
5.4 Écoulement de Poiseuille en tube . . . 157
5.5 Couche limite sur une plaque plane . . . 158
5.5.1 Mise en évidence expérimentale . . . 158
5.5.2 Analyse locale . . . 159
5.5.3 Modes propres, stabilité marginale, effets non parallèles 159
5.5.4 Croissance transitoire . . . 162

6 Instabilités à faible nombre de Reynolds 165
6.1 Introduction . . . 165
6.2 Films tombant sur un plan incliné . . . 168
6.2.1 Écoulement de base et échelles caractéristiques . . . 169
6.2.2 Formulation du problème de stabilité . . . 170
6.2.3 Instabilité interfaciale de grande longueur d'onde . . . 172
6.2.4 Mécanisme de l'instabilité interfaciale . . . 176
6.2.5 Étude expérimentale . . . 179
6.2.6 Instabilité à faible pente du mode de paroi . . . 184
6.3 Films liquides cisaillés . . . 185
6.3.1 Introduction . . . 185
6.3.2 Mécanisme de l'instabilité des ondes longues . . . 186
6.3.3 Ondes « moins longues » . . . 190
6.4 Exercices . . . 191
6.4.1 Inclinaison critique d'un film tombant . . . 191
6.4.2 Conditions aux limites sur une interface libre . . . 191
6.4.3 Résolution pour les ondes longues . . . 191

7 Avalanches, rides et dunes 193
7.1 Introduction . . . 193
7.2 Avalanches . . . 194
7.2.1 Dynamique d'un écoulement granulaire dense . . . 195
7.2.2 Stabilité . . . 197
7.2.3 Expériences . . . 198
7.3 Transport de sédiments par un écoulement . . . 201
7.3.1 Analyse dimensionnelle . . . 201
7.3.2 Vitesse des grains mobiles . . . 201
7.3.3 Densité de grains mobiles . . . 203
7.3.4 Flux de grains . . . 204
7.3.5 Effets de relaxation . . . 204
7.4 Rides et dunes : première analyse dimensionnelle . . . 207
7.4.1 Rides et dunes éoliennes . . . 207
7.4.2 Rides et dunes aquatiques . . . 208
7.5 Rides aquatiques sous un écoulement continu . . . 210
7.5.1 Le modèle classique . . . 210

7.5.2 Phénomènes de relaxation 214
7.5.3 Discussion 217
7.6 Rides aquatiques sous un écoulement oscillant 223
7.6.1 Introduction 223
7.6.2 Observations 224
7.6.3 Mécanisme d'initiation des rides à grains roulant 227
7.6.4 Discussion 231
7.7 Dunes aquatiques : un modèle élémentaire 232
7.7.1 Introduction 232
7.7.2 Modélisation et écoulement de base 232
7.7.3 Stabilité sur un fond rigide 234
7.7.4 Stabilité sur un fond érodable 235
7.8 Exercices 238
7.8.1 Dunes : coefficient de frottement constant 238
7.8.2 Dunes : coefficient de frottement non constant 238

8 Dynamique non linéaire à petit nombre de degrés de liberté 239
8.1 Introduction 239
8.2 Oscillateurs non linéaires 242
8.2.1 Oscillateur fortement dissipatif dans un potentiel à deux puits 243
8.2.2 Oscillateur de Van der Pol : saturation de l'amplitude 245
8.2.3 Oscillateur de Duffing : correction de la fréquence 247
8.2.4 Oscillateurs forcés 251
8.3 Systèmes à petit nombre de degrés de liberté 253
8.3.1 Équation modèle 253
8.3.2 Équations d'amplitude 254
8.3.3 Réduction à la dynamique du mode marginal au voisinage du seuil 254
8.4 Illustration : instabilité d'une interface cisaillée 256
8.5 Exercices 260
8.5.1 Oscillateur de Van der Pol-Duffing 260
8.5.2 Oscillateur de Van der Pol – Restabilisation 260
8.5.3 Oscillateur de Van der Pol – Accrochage de fréquence 261
8.5.4 Oscillateur de Van der Pol soumis à un forçage constant 261
8.5.5 Oscillateur paramétrique 262
8.5.6 Dynamique faiblement non linéaire de l'équation KS-KdV 263

9 Dynamique non linéaire d'une onde dispersive 265
9.1 Introduction 265
9.2 Instabilité des ondes de gravité 266
9.2.1 Ondes de Stokes 266
9.2.2 Instabilité de Benjamin-Feir 269

9.3 Instabilité par interactions résonnantes 272
9.3.1 Problème modèle 272
9.3.2 Onde non linéaire de Klein-Gordon 273
9.3.3 Instabilité d'une onde non linéaire monochromatique . . 275
9.4 Instabilité vis-à-vis de modulations 277
9.4.1 Dynamique linéaire d'un paquet d'ondes : équation d'enveloppe 278
9.4.2 Dynamique non linéaire : l'équation de Schrödinger . . . 279
9.4.3 Stabilité d'une onde quasi monochromatique 280
9.4.4 Interprétation en termes d'instabilité de phase 282
9.4.5 Dérivation de l'équation NLS pour l'onde de Klein-Gordon 282
9.5 Retour sur les résonances 284
9.6 Exercices 285
9.6.1 Onde non linéaire incluant un harmonique (1) 285
9.6.2 Onde non linéaire incluant un harmonique (2) 286
9.6.3 Onde non linéaire de Korteweg-de Vries 287

10 Dynamique non linéaire des systèmes dissipatifs 289
10.1 Introduction 289
10.2 Dynamique faiblement non linéaire 290
10.2.1 Évolution linéaire d'un paquet d'ondes 290
10.2.2 Effets faiblement non linéaires : équation de Ginzburg-Landau 292
10.2.3 Exemple de dérivation de l'équation de Ginzburg-Landau 293
10.3 Saturation de l'instabilité primaire 294
10.4 Instabilité secondaire d'Eckhaus 295
10.4.1 Critère d'instabilité 295
10.4.2 Interprétation en termes de dynamique de la phase . . . 296
10.4.3 Illustrations expérimentales 298
10.5 Instabilité d'une onde propagative 300
10.5.1 Évolution d'un paquet d'ondes 301
10.5.2 Onde non linéaire 302
10.5.3 Instabilité de Benjamin-Feir-Eckhaus 303
10.5.4 Ondes de Tollmien-Schlichting et transition à la turbulence 305
10.6 Couplage avec un champ à grande échelle 307
10.6.1 Invariance galiléenne et lois de conservation 307
10.6.2 Équations d'évolution couplées 308
10.6.3 Stabilité des ondes 310
10.6.4 Illustration expérimentale 310
10.7 Exercices 313

10.7.1 Dérivation de l'équation GL à partir du modèle de Swift-Hohenberg . . . 313
10.7.2 Invariance par translation et invariance galiléenne . . . 314

11 Systèmes dynamiques et bifurcations **315**
11.1 Introduction . . . 315
11.2 Espace des phases, attracteurs . . . 316
11.2.1 Flot engendré par un champ de vecteurs. Orbites dans l'espace des phases . . . 316
11.2.2 Systèmes dissipatifs et conservatifs. Attracteurs . . . 318
11.2.3 Sections de Poincaré . . . 320
11.3 Étude du système linéarisé – Stabilité linéaire . . . 323
11.3.1 Solution du système linéarisé . . . 323
11.3.2 Sous-espaces invariants . . . 324
11.3.3 Types de points fixes . . . 324
11.3.4 « Ressemblance » des champs non linéaire et linéarisé 325
11.4 Variétés invariantes et formes normales . . . 327
11.4.1 Variétés stable et instable d'un point fixe hyperbolique 327
11.4.2 Variété centrale . . . 329
11.4.3 Forme normale d'un champ de vecteurs . . . 331
11.5 Stabilité structurelle et généricité . . . 334
11.5.1 Position du problème . . . 334
11.5.2 Stabilité structurelle et généricité : définitions . . . 336
11.5.3 Conditions de stabilité structurelle . . . 337
11.6 Bifurcations . . . 340
11.6.1 Introduction . . . 340
11.6.2 Définition d'une bifurcation . . . 340
11.6.3 Codimension d'une bifurcation . . . 341
11.6.4 Bifurcation nœud-col . . . 343
11.6.5 Bifurcation de Hopf . . . 347
11.6.6 Un exemple de bifurcation de codimension deux . . . 349
11.7 Exercices . . . 353
11.7.1 Attracteur de Hénon . . . 353
11.7.2 Exponentielles de matrice . . . 354
11.7.3 Intégration de systèmes différentiels linéaires . . . 354
11.7.4 Portrait de phases . . . 354
11.7.5 Variétés stable et instable . . . 354
11.7.6 Variété centrale . . . 354
11.7.7 Résonances de valeurs propres . . . 355
11.7.8 Forme normale . . . 355
11.7.9 Stabilité structurelle d'une orbite hétérocline . . . 355
11.7.10 Forme normale des équations de Lorenz . . . 355
11.7.11 Diagramme de bifurcation (1) . . . 355
11.7.12 Diagramme de bifurcation (2) . . . 356

11.7.13 Bifurcation de Hopf 356
11.7.14 Bifurcation de Hopf du système de Lorenz 356

Annexe A : Équations de Saint-Venant **357**
A.1 Débit sortant d'une tranche d'un écoulement 357
A.2 Conservation de la masse 358
A.3 Conservation de la quantité de mouvement 358
A.4 Modélisation du frottement pariétal 360

Bibliographie **363**

Index **381**

Préface

Les instabilités hydrodynamiques occupent une place de choix en mécanique des fluides. Depuis Osborne Reynolds et G. I. Taylor, on sait en effet que la transition d'un écoulement laminaire vers la turbulence est due au caractère instable de l'état laminaire vis-à-vis de certaines classes de perturbations, soit infinitésimales, soit d'amplitude finie. Ce paradigme a été pour la première fois magistralement mis en évidence par les travaux de G. I. Taylor sur l'instabilité de l'écoulement de Couette produit par la mise en rotation différentielle de deux cylindres coaxiaux. La théorie de l'instabilité hydrodynamique fait désormais partie de l'arsenal de techniques mis à la disposition du mécanicien des fluides pour étudier les transitions dans une grande variété d'écoulements en génie mécanique, en génie chimique, en aérodynamique et dans l'étude des phénomènes naturels (climatologie, météorologie, géophysique interne).

La littérature sur le sujet est si vaste que peu de chercheurs se sont attaqués à la rédaction d'ouvrages pédagogiques rendant compte des développements majeurs du domaine. Devant l'ampleur de la tâche, il est tentant de couvrir une multitude de situations physiques au risque de se répéter et de lasser le lecteur en mettant en œuvre toujours les mêmes approches méthodologiques. François Charru a su éviter cet écueil et relever le défi. Il a, dans son ouvrage, trouvé un positionnement original à côté des livres classiques de Chandrasekhar et de Drazin & Reid, et de celui plus récent de Schmid & Henningson.

La théorie classique de l'instabilité porte essentiellement sur les écoulements cisaillés quasi parallèles ou parallèles, tels que la couche de mélange, le jet, le sillage, l'écoulement de Poiseuille dans un canal, l'écoulement de couche limite, etc. De telles configurations sont privilégiées dans les livres de Drazin & Reid et de Schmid & Henningson, et elles retiennent tout particulièrement l'attention des chercheurs de sensibilité « mécanicienne ». François Charru a choisi de donner une présentation synthétique de ces situations classiques, en évitant soigneusement de traiter la couche critique dans tous ces états (*cf.* Drazin & Reid), source de bien des difficultés. Il ouvre des perspectives sur les développements plus récents dans l'étude de la transition dans les écoulements cisaillés, par exemple les phénomènes de croissance non modale, la transition « by-pass » et les instabilités convective ou absolue.

Dans les vingt-cinq dernières années, notre vision des instabilités a considérablement évolué sous l'influence conjointe des physiciens et des mathématiciens du non-linéaire et de la théorie des systèmes dynamiques. En particulier, l'afflux des physiciens du macroscopique, dans le terrain de jeu idéal que constitue la mécanique des fluides, a conduit à un profond renouvellement de notre discipline. Il convenait donc d'initier l'étudiant aux concepts essentiels, sans se perdre dans les détails techniques. Là aussi, François Charru a réussi à faire une présentation attrayante des notions les plus importantes qui font désormais partie du bagage de tout spécialiste des instabilités. Sont également introduits les fondements de la dynamique spatio-temporelle des structures dissipatives, tels qu'on peut les aborder dans les ouvrages de Manneville et de Godrèche & Manneville. De nombreux travaux ont maintenant démontré que l'étude d'équations d'amplitude modèles de type Ginzburg-Landau ou Schrödinger non linéaire permet d'éclairer la nature de la dynamique faiblement non linéaire au voisinage du seuil d'instabilité. On sait aussi que ces « toy-models » sont également pertinents loin des seuils, en régime largement supercritique, pour extraire les caractéristiques d'instabilités génériques telles que celles de Benjamin-Feir ou d'Eckhaus, et pour mettre à l'épreuve des outils méthodologiques tels que la dynamique de phase des textures dissipatives.

Il convient finalement d'inviter le lecteur à savourer les deux chapitres du cœur du livre, consacrés aux instabilités interfaciales de films et à celles régissant la formation des rides et des dunes. L'auteur a, par ses propres travaux, contribué de façon très significative et pérenne à l'avancée des connaissances dans ces deux domaines et il nous livre ici sa propre vision. Soulignons à ce propos que la loi de comportement des milieux granulaires n'est pas encore « inscrite dans le marbre ». Les instabilités observées expérimentalement dans ces milieux complexes permettent alors de valider ou au contraire de rejeter telle ou telle loi de comportement postulée dans les modèles théoriques. En ouvrant de belles perspectives sur les recherches en cours, l'auteur fait ainsi appréhender à l'étudiant la vitalité et l'actualité de la discipline.

L'approche résolument « physique » adoptée par l'auteur constitue une caractéristique essentielle de cet ouvrage. Pour chaque classe d'instabilité, François Charru présente, à l'aide de l'analyse dimensionnelle et d'arguments physiques élégants, le mécanisme responsable de l'amplification des perturbations. Ce type de raisonnement et l'évaluation des ordres de grandeur afférents sont souvent effectués avant tout développement mathématique systématique. L'auteur a également à cœur de présenter des exemples d'expériences de laboratoire permettant de valider les résultats théoriques. Ce mode d'exposition permet à l'étudiant de se familiariser avec la démarche du chercheur, qu'il soit théoricien ou expérimentateur.

Le lecteur est donc encouragé à s'approprier les concepts et les méthodes présentés dans ce livre, à s'imprégner de la démarche de l'auteur qui laisse une large place à l'intuition et à la compréhension physique des phénomènes. Il/Elle pourra ensuite voler de ses propres ailes et découvrir à son tour de belles instabilités hydrodynamiques.

Patrick HUERRE

Avant-propos

La raison a tant de formes, que nous ne savons à laquelle nous prendre ; l'expérience n'en a pas moins.
Montaigne, *Essais*, Livre 3, 13.

Depuis plus d'un siècle, les instabilités hydrodynamiques se révèlent un champ d'étude foisonnant et constamment renouvelé, enrichi par un dialogue fructueux avec d'autres domaines de la physique : transitions de phase, optique et chimie non linéaires, plasmas, astrophysique et géophysique... L'expérimentation s'en trouve stimulée, tant par l'observation que par la simulation numérique, ainsi que le développement ou la transposition de nouveaux concepts d'analyse, liés en particulier à l'analyse asymptotique multi-échelles et à la théorie des systèmes dynamiques non linéaires. D'une part, l'intérêt se maintient pour le problème fondamental de la transition à la turbulence, toujours ouvert depuis les observations de Reynolds en 1883 ; cet intérêt est aujourd'hui vivifié par des concepts tels que la croissance transitoire liée à la non-normalité des opérateurs, et par l'importance reconnue des solutions non linéaires instables. D'autre part, de nouveaux problèmes ont émergé, où la pertinence des lois de comportement est cruciale, comme la stabilité des écoulements de fluides complexes, non newtoniens ou diphasiques, et la stabilité des écoulements granulaires.

Cet ouvrage s'est construit au cours de dix années d'enseignement à des étudiants du Master (ex-DEA) de Dynamique des Fluides de Toulouse. Il s'adresse à tout étudiant, chercheur ou ingénieur désirant s'initier, au-delà de ses connaissances de base en hydrodynamique, aux questions évoquées ci-dessus. Les phénomènes y sont discutés, autant que possible, en termes d'échelles caractéristiques et d'analyse dimensionnelle pour accéder aux mécanismes physiques ou à un « contenu qualitatif des équations », suivant un vœu de Feynman[1]. Cette approche s'intègre bien avec la théorie des systèmes dynamiques, des bifurcations et des ruptures de symétrie, qui structure l'ouvrage. Les méthodes asymptotiques ont aussi une large place ; leur puissance et leur succès, parfois bien au-delà des limites attendues, sont toujours une

1. Le Cours de Physique, Électromagnétisme 2, §41.6, InterEditions, 1979.

surprise. De nombreuses études expérimentales sont discutées en détail, qui viennent conforter les interprétations théoriques ou au contraire montrer leurs limites.

La première partie (chapitres 1 à 7) est essentiellement consacrée à la stabilité linéaire, et la seconde partie (chapitres 8 à 11), aux aspects non linéaires. Le premier chapitre est une introduction à la théorie des systèmes dynamiques ; il est illustré par de nombreux problèmes hydrodynamiques « simples », et introduit aussi la notion de croissance transitoire. Le second chapitre présente la méthodologie générale d'une analyse de stabilité : perturbation d'un état de base, linéarisation, modes normaux, relation de dispersion, illustrée par les problèmes classiques d'instabilités thermiques, capillaires, ou gravitaires.

Les chapitres 3 à 5 exposent les analyses classiques des instabilités dans les écoulements ouverts (critère d'instabilité, instabilités convective et absolue, croissance temporelle et spatiale), puis les instabilités des écoulements parallèles : instabilités non visqueuses dans le chapitre 4 (théorème de Rayleigh du point d'inflexion, instabilité de Kelvin-Helmholtz), et visqueuses dans le chapitre 5 (équations d'Orr-Sommerfeld, ondes de Tollmien-Schlichting dans les couches limites et l'écoulement de Poiseuille).

Les chapitres 6 et 7 discutent des problèmes peu abordés dans les ouvrages classiques : (i) les instabilités à petit nombre de Reynolds, qui surviennent en particulier en présence d'interfaces déformables (films liquides tombant sur un plan incliné ou cisaillés par un autre fluide, écoulements de plusieurs couches superposées) ; et (ii) les instabilités de lits granulaires s'écoulant sur une pente (avalanches) ou érodés par un écoulement, qui donnent lieu à la croissance d'ondes de surface, de rides et de dunes. Le chapitre 7 est aussi une introduction (très partielle) à la physique des milieux granulaires, et illustre comment la stabilité est fortement affectée par la modélisation, par l'introduction de phénomènes de relaxation en particulier.

Les chapitres 8 à 10 sont une introduction à la dynamique faiblement non linéaire, où la méthode des échelles multiples trouve une large place. Le chapitre 8 discute les oscillateurs non linéaires et les effets non linéaires « canoniques » : saturation de l'amplitude et correction de la fréquence (équation de Landau), et accrochage de fréquence pour les oscillateurs forcés ; ensuite, l'analyse de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, mais confinés spatialement, révèle comment la dynamique est gouvernée au voisinage du seuil de l'instabilité par un « mode maître ». Le chapitre 9 est consacré aux ondes non linéaires dispersives dont le modèle canonique est l'onde de gravité de Stokes, et à l'instabilité de Benjamin-Feir ; cette instabilité est analysée à partir de deux points de vue : en termes de résonances (équations d'amplitudes), et en termes de modulations de l'enveloppe (équation de Schrödinger non linéaire). Le chapitre 10 présente la dynamique des systèmes dissipatifs dans les cas supercritique et sous-critique, typiquement la convection de Rayleigh-Bénard ou l'écoulement de Couette-Taylor pour le premier, et les écoulements de Poiseuille et de couche limite pour le second ; on analyse ensuite, dans le cas supercritique, les instabilités secondaires de type Eckhaus, ou Benjamin-Feir-Eckhaus dans le cas des ondes ; on étudie enfin la situation où, du fait d'une invariance particulière (galiléenne, ou liée à une loi de conservation), le mode de nombre d'onde nul est marginal, conduisant à un couplage non trivial de deux modes de phase presque neutres.

Le dernier chapitre est un développement plus mathématique de la théorie des bifurcations (théorème de la variété centrale, formes normales, bifurcations de codimension supérieure à un), qui systématise des notions introduites dans les chapitres précédents. Enfin, une annexe présente les équations de Saint-Venant qui offrent un cadre simple pour l'analyse de problèmes où les gradients longitudinaux sont faibles dans la direction de l'écoulement.

Chaque chapitre se termine par des exercices, qui sont souvent des ouvertures vers des problèmes nouveaux. Enfin, onze notices biographiques présentent quelques grands noms attachés à l'étude des instabilités : Bagnold, Chandrasekhar, Helmholtz, Kapitza, Kelvin, Landau, Poincaré, Rayleigh, Reynolds, Stokes, et Taylor.

Cet ouvrage n'a pas la prétention d'être exhaustif ; des choix ont dû être faits, qui ne rendent pas justice à toute la richesse des avancées réalisées ; des domaines et des concepts importants comme les tourbillons, la croissance transitoire et les modes globaux, moins bien maîtrisés par l'auteur, ne sont que brièvement traités ou restent dans l'ombre ; des indications bibliographiques générales sont alors données.

L'auteur tient enfin à remercier les collègues et amis, qui, au travers de nombreuses conversations, ont contribué à enrichir cet ouvrage, au premier rang desquels Alessandro Bottaro, Grégoire Casalis, Gérard Iooss, John Hinch, Paolo Luchini et Jacques Magnaudet. Il remercie également Bruno Andreotti, Alessandro Bottaro et Pierre Brancher pour leur relecture attentive du manuscrit et leurs bonnes suggestions.

Chapitre 1

Introduction

Ce premier chapitre est une introduction à la stabilité des systèmes discrets et aux bifurcations, selon le point de vue géométrique de la théorie des systèmes dynamiques dans l'espace des phases. La première partie, à caractère plus mathématique que physique, définit les notions fondamentales. Ces notions sont ensuite illustrées par des exemples empruntés à l'hydrodynamique et à la physique des liquides. Une brève présentation de la notion de croissance transitoire, liée à la non-orthogonalité des vecteurs propres du système linéarisé, clôt le chapitre.

1.1 Espace des phases, portrait de phase

L'évolution temporelle d'un système physique discret (non continu) est généralement gouvernée par des équations différentielles, issues des principes de conservation de la physique et de lois de comportement phénoménologiques. Ces équations peuvent toujours s'écrire comme un système d'*équations différentielles ordinaires* (EDO) du premier ordre (Glendinning 1994) :

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = X_i(x_1, ..., x_n), \qquad i = 1, n. \tag{1.1}$$

Les variables x_i sont appelées *degrés de liberté du système*[1]. Considérons par exemple un pendule simple amorti, dont la position par rapport à la verticale est repérée par l'angle θ ; l'équation de son mouvement

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \mu\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 \sin\theta = 0, \tag{1.2}$$

1. Les degrés de liberté en question sont les degrés de liberté dynamiques (ici, position et vitesse), différents des degrés de liberté cinématiques dans l'espace physique (positions).