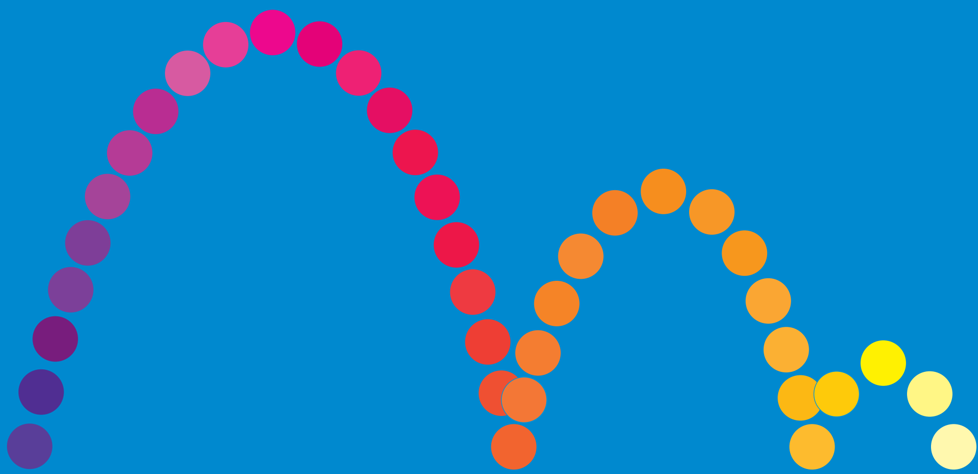
COLLECTION ENSEIGNEMENT SUP //// Mathématiques

L3M1

Théorie des systèmes dynamiques : Une introduction



Luís Barreira et Claudia Valls

edp sciences

Théorie des systèmes dynamiques : une introduction

Luis Barreira et Claudia Valls

Traduit par les auteurs

17, avenue du Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

Imprimé en France

ISBN : 978-2-7598-0765-9

TABLE DES MATIÈRES

This page intentionally left blank

AVANT-PROPOS

Ce livre est une introduction autonome à la théorie des systèmes dynamiques, avec un accent particulier sur le temps discret. Cela inclut les systèmes dynamiques topologiques, en basse dimension, hyperboliques et symboliques, ainsi qu'une brève introduction à la théorie ergodique. Le livre peut être utilisé comme manuel pour un cours d'un ou deux semestres pour les étudiants de niveau avancé du premier cycle ou étudiants des cycles supérieurs. Il peut aussi être utilisé pour une étude indépendante et comme point de départ pour l'étude de sujets plus avancés.

L'exposition est directe et rigoureuse. En particulier, tous les résultats formulés dans le livre sont prouvés. On a essayé que chaque démonstration soit la plus simple possible. Parfois, cela nécessite une préparation ou la restriction à classes appropriées de systèmes dynamiques, ce qui se justifie pleinement dans un cours introductif. Le texte comprend aussi de nombreux exemples qui illustrent en détail les concepts et les résultats, ainsi que 140 exercices, avec différents niveaux de difficulté.

La théorie des systèmes dynamiques est très large et très active en termes de recherche. Elle dépend aussi substantiellement de la plupart des principaux domaines des mathématiques. Ainsi, afin de donner une vue suffisamment large, mais toujours autonome et avec une taille contrôlée, il était nécessaire de faire une sélection des sujets traités. De ce fait, certains sujets ont été exclus, notamment la dynamique hamiltonienne et la dynamique holomorphe. On a indiqué des références pour ces autres sujets qui sont des prolongements naturels de ce livre.

Luís Barreira et Claudia Valls
Lisbonne, avril 2013

This page intentionally left blank

I

NOTIONS DE BASE

On introduit dans ce chapitre la notion de système dynamique, à temps discret et temps continu. On décrit aussi plusieurs exemples qui, avec d'autres exemples introduits au long du livre, sont utilisés pour illustrer les nouveaux concepts et les nouveaux résultats. On décrit également quelques constructions de base qui déterminent de nouveaux systèmes dynamiques.

I.1. Notion de système dynamique

Un système dynamique à temps discret est simplement une application.

***Définition* I.1.** Une application $f\colon X \to X$ est appelée un *système dynamique à temps discret* ou simplement un *système dynamique*.

On définit récursivement

$$f^{n+1} = f \circ f^n$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}$. On écrit aussi $f^0 = \mathrm{Id}$, où Id est l'application identité. On note que

$$f^{m+n} = f^m \circ f^n \tag{I.1}$$

pour $m, n \in \mathbb{N}_0$, où $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Lorsque l'application f est inversible, on définit aussi $f^{-n} = (f^{-1})^n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, l'identité (I.1) est satisfaite pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$.

***Exemple* I.2.** Soient $f\colon X \to X$ et $g\colon Y \to Y$ des systèmes dynamiques. On définit un nouveau système dynamique $h\colon X \times Y \to X \times Y$ par

$$h(x, y) = (f(x), g(y)).$$

On note que si f et g sont inversibles, alors l'application h est aussi inversible et a pour application réciproque

$$h^{-1}(x,y) = \big(f^{-1}(x), g^{-1}(y)\big).$$

On considère maintenant le cas du temps continu.

Définition I.3. Une famille d'applications $\varphi_t \colon X \to X$ pour $t \geqslant 0$ telles que $\varphi_0 = \mathrm{Id}$ et

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \quad \text{pour tous } t, s \geqslant 0$$

est appelée un *semi-flot*. Une famille d'applications $\varphi_t \colon X \to X$ pour $t \in \mathbb{R}$ telles que $\varphi_0 = \mathrm{Id}$ et

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \quad \text{pour tous } t, s \in \mathbb{R}$$

est appelée un *flot*.

On dit aussi qu'une famille d'applications φ_t est un *système dynamique à temps continu* ou simplement un *système dynamique* si elle est un flot ou un semi-flot. Si φ_t est un flot, alors

$$\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_0 = \mathrm{Id}.$$

Donc, chaque application φ_t est inversible et a pour application réciproque $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$.

Un exemple simple d'un flot est un mouvement de translation avec vitesse constante.

Exemple I.4. Soit $y \in \mathbb{R}^n$. On considère les applications $\varphi_t \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définies par

$$\varphi_t(x) = x + ty \quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \text{ et } x \in \mathbb{R}^n.$$

On a $\varphi_0 = \mathrm{Id}$ et

$$\begin{aligned}\varphi_{t+s}(x) &= x + (t+s)y \\ &= (x+sy) + ty = (\varphi_t \circ \varphi_s)(x).\end{aligned}$$

Donc, la famille des applications φ_t est un flot.

Exemple I.5. On considère les flots $\varphi_t \colon X \to X$ et $\psi_t \colon Y \to Y$, pour $t \in \mathbb{R}$. La famille des applications $\alpha_t \colon X \times Y \to X \times Y$ définies pour chaque $t \in \mathbb{R}$ par

$$\alpha_t(x,y) = \big(\varphi_t(x), \psi_t(y)\big)$$

est aussi un flot. En outre,

$$\alpha_t^{-1}(x,y) = \big(\varphi_{-t}(x), \psi_{-t}(y)\big).$$

On souligne que l'expression *système dynamique* est utilisée à la fois pour les systèmes dynamiques à temps discret et les systèmes dynamiques à temps continu.

I.2. Exemples pour le temps discret

On décrit dans cette section plusieurs exemples de systèmes dynamiques à temps discret.

I.2.1. Rotations du cercle

On considère d'abord les rotations du cercle. Le *cercle* est défini ici par $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que S^1 est obtenu à partir de la droite réelle en identifiant les points $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x - y \in \mathbb{Z}$. Autrement dit,

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{R}/\sim,$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$ définie par $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Les classes d'équivalence, qui sont les éléments de S^1, peuvent être écrites sous la forme

$$[x] = \big\{x + m : m \in \mathbb{Z}\big\}.$$

En particulier, on peut introduire les opérations

$$[x] + [y] = [x + y] \quad \text{et} \quad [x] - [y] = [x - y].$$

On peut aussi identifier S^1 avec $[0,1]/\{0,1\}$, où les extrémités de l'intervalle $[0,1]$ sont identifiées.

Définition I.6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la *rotation* $R_\alpha \colon S^1 \to S^1$ par

$$R_\alpha([x]) = [x + \alpha]$$

(voir la figure I.1).

On écrit aussi

$$R_\alpha(x) = x + \alpha \bmod 1,$$

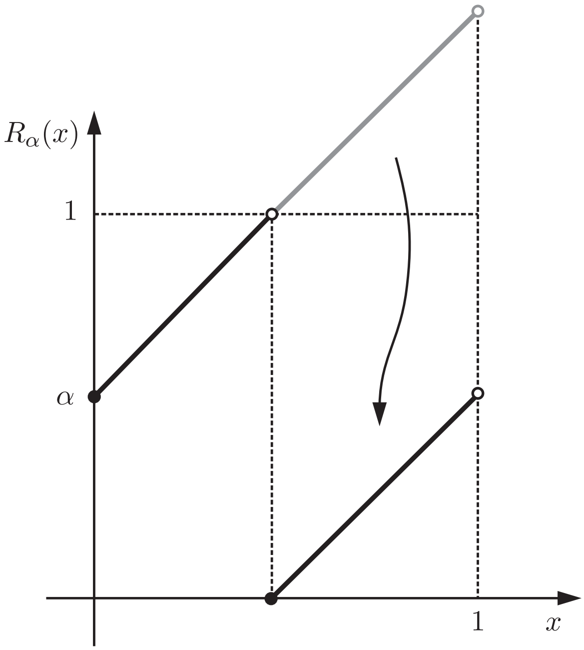


FIGURE I.1. Rotation R_α.

en identifiant $[x]$ avec son représentant dans l'intervalle $[0,1[$. L'application R_α pourrait aussi être appelée une *translation de l'intervalle*. On observe que $R_\alpha\colon S^1 \to S^1$ est inversible et son application réciproque est $R_\alpha^{-1} = R_{-\alpha}$.

On introduit maintenant la notion de point périodique.

Définition I.7. Soit $q \in \mathbb{N}$. Un point $x \in X$ est dit *q-périodique* pour une application $f\colon X \to X$ si $f^q(x) = x$. On dit aussi que $x \in X$ est un *point périodique* pour f s'il est q-périodique pour un certain $q \in \mathbb{N}$.

En particulier, les points fixes, c'est-à-dire les points $x \in X$ tels que $f(x) = x$ sont q-périodiques pour tout $q \in \mathbb{N}$. En outre, un point q-périodique est kq-périodique pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Définition I.8. On dit qu'un point périodique a pour *période* q s'il est q-périodique mais n'est pas l-périodique pour tout $l < q$.

On considère maintenant le cas particulier des rotations du cercle R_α. On vérifie que leur comportement est très différent selon que α est rationnel ou irrationnel.

Proposition I.9. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, alors R_α n'a pas de point périodique.*
2. *Si $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$ avec p et q premiers entre eux, alors tous les points de S^1 sont périodiques pour R_α et ont pour période q.*

Démonstration. On note que $[x] \in S^1$ est q-périodique si et seulement si $[x+q\alpha] = [x]$, c'est-à-dire si et seulement si $q\alpha \in \mathbb{Z}$. Les deux propriétés dans la proposition découlent facilement de cette remarque. ■

I.2.2. Applications dilatantes du cercle

On considère dans cette section une autre famille d'applications de S^1 dans lui-même.

Définition I.10. Soit $m > 1$ un entier. L'*application dilatante* $E_m \colon S^1 \to S^1$ est définie par

$$E_m(x) = mx \bmod 1.$$

Par exemple, pour $m = 2$ on a

$$E_2(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1/2[, \\ 2x - 1 & \text{si } x \in [1/2, 1[\end{cases}$$

(voir la figure I.2).

On détermine maintenant les points périodiques pour l'application dilatante E_m. Puisque $E_m^q(x) = m^q x \bmod 1$, un point $x \in S^1$ est q-périodique si et seulement si

$$m^q x - x = (m^q - 1)x \in \mathbb{Z}.$$

Donc, les points q-périodiques pour l'application E_m sont

$$x = \frac{p}{m^q - 1}, \quad \text{pour } p = 1, 2, \ldots, m^q - 1. \tag{I.2}$$

En outre, le nombre $n_m(q)$ de points périodiques pour E_m de période q peut être calculé facilement pour chaque q (voir le tableau I.1 pour $q \leqslant 6$). Par exemple, si q est premier, alors

$$n_m(q) = m^q - m.$$

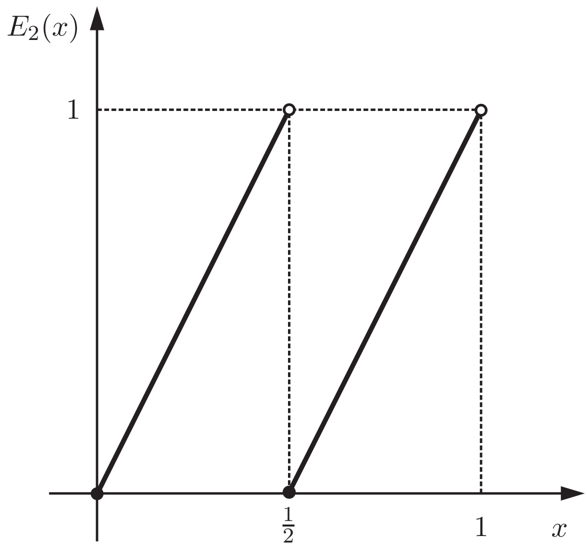


FIGURE I.2. Application dilatante E_2.

TABLEAU I.1. Nombre $n_m(q)$ de points périodiques pour E_m de période q.

q	$n_m(q)$
1	$m-1$
2	$m^2-m=m^2-1-(m-1)$
3	$m^3-m=m^3-1-(m-1)$
4	$m^4-m^2=m^4-1-(m^2-1)$
5	$m^5-m=m^5-1-(m-1)$
6	$m^6-m^3-m^2+m$

I.2.3. Endomorphismes du tore

On considère dans cette section une troisième famille de systèmes dynamiques à temps discret. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le *n-tore* ou simplement le *tore* est défini par

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n/\sim,$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence dans $\mathbb{R}^n$ définie par $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}^n$. Les éléments de $\mathbb{T}^n$ sont donc les classes d'équivalence

$$[x] = \{x + y : y \in \mathbb{Z}^n\},$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$. Soit maintenant A une matrice de dimension (n, n) à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Définition I.11. L'*endomorphisme du tore* $T_A\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ est défini par

$$T_A([x]) = [Ax] \quad \text{pour } [x] \in \mathbb{T}^n.$$

On dit aussi que T_A est l'*endomorphisme du tore induit par* A.

Puisque A est une application linéaire,

$$Ax - Ay \in \mathbb{Z}^n \quad \text{lorsque } x - y \in \mathbb{Z}^n.$$

Cela montre que $Ay \in [Ax]$ lorsque $y \in [x]$ et, donc, T_A est bien défini.

En général, l'application T_A n'est pas nécessairement inversible, même si la matrice A est inversible. Lorsque T_A est inversible, on dit aussi qu'elle est l'*automorphisme du tore induit par* A. On représente sur la figure I.3 l'automorphisme du tore $\mathbb{T}^2$ induit par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

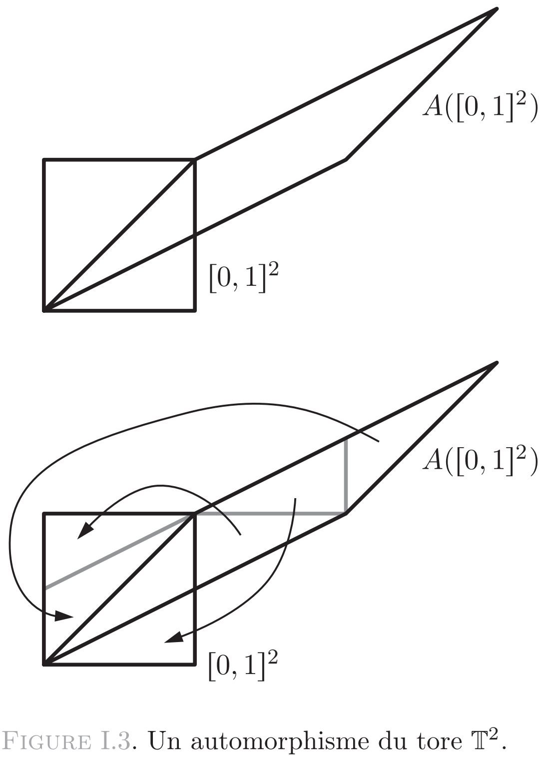


Figure I.3. Un automorphisme du tore $\mathbb{T}^2$.

On détermine maintenant les points périodiques pour une classe d'automorphismes du tore.

Proposition I.12. *Soit $T_A\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ un automorphisme du tore induit par une matrice A sans valeur propre de module 1. Alors les points périodiques pour T_A sont les points de coordonnées rationnelles, c'est-à-dire les éléments de $\mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n$.*

Démonstration. Soit $[x] = [(x_1, \dots, x_n)] \in \mathbb{T}^n$ un point périodique. Alors il existe $q \in \mathbb{N}$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}^n$ tels que $A^q x = x + y$, c'est-à-dire,

$$(A^q - \mathrm{Id})x = y.$$

Puisque A n'a pas de valeur propre de module 1, la matrice $A^q - \mathrm{Id}$ est inversible et on peut écrire

$$x = (A^q - \mathrm{Id})^{-1} y.$$

En outre, puisque les coefficients de $A^q - \mathrm{Id}$ sont des nombres entiers, chaque coefficient de $(A^q - \mathrm{Id})^{-1}$ est un nombre rationnel et donc $x \in \mathbb{Q}^n$.

On suppose maintenant que $[x] = [(x_1, \dots, x_n)] \in \mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n$ et on écrit

$$(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{p_1}{r}, \dots, \frac{p_n}{r}\right), \tag{I.3}$$

où $p_1, \dots, p_n \in \{0, 1, \dots, r-1\}$. Puisque les coefficients de A sont des nombres entiers, pour chaque $q \in \mathbb{N}$, on a

$$A^q(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{p_1'}{r}, \dots, \frac{p_n'}{r}\right) + (y_1, \dots, y_n)$$

pour certains $p_1', \dots, p_n' \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}^n$. Mais puisque le nombre de points de la forme (I.3) est r^n, il existe $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ avec $q_1 \neq q_2$ tels que

$$A^{q_1}(x_1, \dots, x_n) - A^{q_2}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

En supposant, sans perte de généralité, que $q_1 > q_2$, on obtient

$$A^{q_1 - q_2}(x_1, \dots, x_n) - (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$$

(voir l'exercice I.12) et donc $T_A^{q_1 - q_2}([x]) = [x]$. ∎

L'exemple suivant montre que la proposition I.12 ne peut être étendue à tout endomorphisme du tore.

Exemple I.13. Considérons l'endomorphisme du tore $T_A\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ induit par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que T_A n'est pas un automorphisme puisque $\det A = 2$ (voir l'exercice I.12). On observe maintenant que

$$T_A\Big(0, \frac{1}{2}\Big) = \Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big), \quad T_A\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big) = (0,0) \quad \text{et} \quad T_A(0,0) = (0,0).$$

Cela montre que les points de coordonnées rationnelles $(0, 1/2)$ et $(1/2, 1/2)$ ne sont pas périodiques. D'autre part, les valeurs propres $2+\sqrt{2}$ et $2-\sqrt{2}$ de A ont des modules différents de 1.

I.3. Exemples pour le temps continu

On donne dans cette section plusieurs exemples de systèmes dynamiques à temps continu.

I.3.1. Équations différentielles autonomes

On considère d'abord des équations différentielles (ordinaires) autonomes, c'est-à-dire des équations différentielles qui ne dépendent pas explicitement du temps. On vérifie qu'elles donnent lieu naturellement à la notion de flot.

Proposition I.14. *Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue telle que, pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{I.4}$$

a une solution unique $x(t, x_0)$ définie par $t \in \mathbb{R}$. Alors la famille des applications $\varphi_t\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définies pour chaque $t \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi_t(x_0) = x(t, x_0)$$

est un flot.

Démonstration. Pour chaque $s \in \mathbb{R}$, considérons la fonction $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$y(t) = x(t+s, x_0).$$

On a $y(0) = x(s, x_0)$ et

$$y'(t) = x'(t + s, x_0) = f(x(t + s, x_0)) = f(y(t))$$

pour $t \in \mathbb{R}$. Donc, la fonction y est aussi une solution de l'équation $x' = f(x)$. Puisque par hypothèse le problème de Cauchy (I.4) a une solution unique, on obtient

$$y(t) = x(t, y(0)) = x(t, x(s, x_0)),$$

ou

$$x(t + s, x_0) = x(t, x(s, x_0)) \tag{I.5}$$

pour tous $t, s \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Il résulte de (I.5) que $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$. En outre,

$$\varphi_0(x_0) = x(0, x_0) = x_0,$$

c'est-à-dire $\varphi_0 = \mathrm{Id}$. Cela montre que la famille des applications φ_t est un flot. ■

On considère maintenant deux exemples spécifiques d'équations différentielles autonomes et on décrit les flots qu'elles déterminent.

Exemple I.15. Considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases}$$

Si $(x, y) = (x(t), y(t))$ est une solution, alors

$$(x^2 + y^2)' = 2xx' + 2yy' = -2xy + 2yx = 0.$$

Donc, il existe une constante $r \geqslant 0$ telle que

$$x(t)^2 + y(t)^2 = r^2.$$

Soient

$$x(t) = r\cos\theta(t) \quad \text{et} \quad y(t) = r\sin\theta(t),$$

où θ est une fonction différentiable. Il résulte de l'identité $x' = -y$ que

$$-r\theta'(t)\sin\theta(t) = -r\sin\theta(t).$$

Donc, $\theta'(t) = 1$ et il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\theta(t) = t + c$. Pour

$$(x_0, y_0) = (r\cos c, r\sin c) \in \mathbb{R}^2,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r\cos(t+c) \\ r\sin(t+c) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t \cdot r\cos c - \sin t \cdot r\sin c \\ \sin t \cdot r\cos c + \cos t \cdot r\sin c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On remarque que

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

est une matrice de rotation pour chaque $t \in \mathbb{R}$. Puisque $R(0) = \mathrm{Id}$, il résulte de la proposition I.14 que la famille des applications $\varphi_t \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définies par

$$\varphi_t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = R(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

est un flot. On note que l'identité $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ est équivalente à l'identité entre matrices de rotation

$$R(t+s) = R(t)R(s).$$

Exemple I.16. On considère maintenant l'équation différentielle

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$$

Si $(x, y) = (x(t), y(t))$ est une solution, alors

$$(x^2 - y^2)' = 2xx' - 2yy' = 2xy - 2yx = 0.$$

Donc, il existe une constante $r \geqslant 0$ telle que

$$x(t)^2 - y(t)^2 = r^2 \quad \text{ou} \quad x(t)^2 - y(t)^2 = -r^2. \tag{I.6}$$

Dans le premier cas, on peut écrire

$$x(t) = r\cosh\theta(t) \quad \text{et} \quad y(t) = r\sinh\theta(t),$$

où θ est une certaine fonction différentiable. Puisque $x' = y$, on a

$$r\theta'(t)\sinh\theta(t) = r\sinh\theta(t)$$