DANIEL
ZAJDENWEBER

Économie des extrêmes

Krachs, catastrophes et inégalités

Champs essais

ÉCONOMIE DES EXTRÊMES

KRACHS, CATASTROPHES ET INÉGALITÉS

Du même auteur

Hasard et Prévision, Economica, 1976
Économie et Gestion de l'assurance, Economica, 2006

Daniel Zajdenweber

ÉCONOMIE DES EXTRÊMES

KRACHS, CATASTROPHES ET INÉGALITÉS

Édition revue et augmentée 2009

Champs essais

ISBN : 978-2-0812-2902-0

À Annie, Alexis et Stéphane,
dont la patience, elle aussi,
fut extrême.

Introduction

La colonne « nilométrique » de l'île Rodah, sur le Nil, au Caire, recense près de huit siècles d'histoire des crues du fleuve égyptien, gravés dans le marbre. Jusqu'à la fin du Moyen Âge, ces statistiques ont servi au calcul des impôts payés aux califes qui dirigeaient l'Égypte [1]. De même, les niveaux du grand fleuve chinois Yang-Tseu-Kiang ont été gravés dans la pierre de certains temples pour rester à la disposition de l'administration impériale [2]. Ces deux exemples montrent que les phénomènes extrêmes étaient connus des civilisations les plus anciennes, qui déjà s'efforçaient, ne pouvant les prédire, de les recenser et d'en garder la mémoire sur un temps long. Aujourd'hui, nous pouvons dresser une liste très diverse et sans doute non exhaustive de ces « extrêmes » qui retiennent notre attention et celle des médias, et qui sont devenus une préoccupation majeure des économistes comme des responsables politiques : krachs boursiers, bulles financières, faillites de grandes banques, cyclones, tsunamis, explosions d'usines chimiques ou de centrales nucléaires, répartition des fortunes mondiales, cotes de certains artistes, montants des transferts de

1. Harold E. Hurst [1954].
2. Source : Communication personnelle avec l'hydrologue Ven Te Chow (1919-1981).

sportifs, box-office des films, hit-parade du show-business, *blockbusters* pharmaceutiques, jusqu'à la longueur des bouchons sur les autoroutes. Cette préoccupation vient non seulement de l'ampleur de ces phénomènes, dont les conséquences peuvent être désastreuses et coûteuses, mais aussi de leur fréquence : en effet, s'ils sont peu nombreux, ils ne sont pas rares pour autant et semblent même, pour certains, de plus en plus fréquents.

Les « valeurs extrêmes », catégorie statistique à laquelle ils appartiennent, se définissent à partir de cette double caractéristique de taille et de fréquence. Les extrêmes sont des événements d'une taille importante par rapport aux autres événements de même nature. Et la taille d'un événement extrême ne peut s'apprécier que de manière relative. Ainsi, 2 % ou 3 % de hausse ou de baisse d'un cours de Bourse sont des écarts extrêmes pour un *trader* qui opère dans un délai de quelques minutes, alors qu'ils sont négligeables à l'échelle du mois, *a fortiori* de l'année, où les écarts peuvent être de 100 % à la baisse et parfois de plus de 100 % à la hausse. Les valeurs extrêmes se caractérisent aussi par une fréquence faible. C'est la combinaison de ces deux éléments, taille et fréquence, qui fait de l'analyse des extrêmes un enjeu pour les économistes et les acteurs de l'économie en général, car, si ces phénomènes étaient de taille réduite ou suffisamment rares pour ne pas avoir d'impact économique significatif, leur étude ne présenterait d'intérêt que pour eux-mêmes et serait réservée à quelques spécialistes dans leur discipline respective. L'analyse des valeurs extrêmes suppose ainsi comme préalable de se débarrasser du préjugé, fréquent parmi les économistes et les acteurs de la finance, selon lequel un phénomène économique de très grande ampleur est nécessairement très rare et donc peu significatif, alors que, dans la réalité, la survenue d'un tel événement, qui peut remettre en question l'existence même du système économique, est loin d'être un simple cas d'école. Les valeurs extrêmes en économie ne doivent donc pas être étudiées comme des curiosités à la marge, mais bien comme un élément central, au cœur des mécanismes économiques.

La crise financière mondiale que nous traversons aujourd'hui en constitue la dernière et plus spectaculaire illustration. En un temps très court, nous avons pu observer un nombre considérable de ces phénomènes : krachs boursiers, faillites de grandes banques donnant lieu à la plus grave crise économique depuis la Seconde Guerre mondiale, crise qui a également montré à quel point les « extrêmes » demeuraient un défi pour les économistes, les banquiers, les assureurs et l'ensemble des acteurs de la finance en général, dont les outils statistiques et les modèles mathématiques usuels ne permettent pas d'appréhender de telles valeurs, de mesurer leur occurrence et d'en apprécier correctement les risques.

Définir les valeurs extrêmes : espérance et variance

La première définition que nous avons donnée des « extrêmes » : des événements de grande ampleur et de fréquence réduite sans être rares, était intuitive et peu rigoureuse. Pour définir une valeur extrême sans ambiguïté, il faut revenir aux deux concepts élémentaires de la statistique, l'espérance et la variance, autrement dit la moyenne et les écarts moyens par rapport à la moyenne. Ceux-ci permettent de comprendre les valeurs extrêmes et en quoi elles diffèrent des phénomènes économiques dits normaux. Car les phénomènes extrêmes dont nous parlons, ceux qui ont une probabilité non négligeable de se réaliser, relèvent de lois de probabilité dont l'espérance et la variance ont des caractéristiques particulières : leur variance ou leur espérance est infinie [1]. Quelques exemples vont nous permettre d'illustrer et d'évaluer les phénomènes économiques extrêmes sans espérance ou sans variance.

Ancien exemple d'extrême sans espérance : le paradoxe de Saint-Pétersbourg

Par définition, l'espérance mathématique d'une variable aléatoire, dans une loterie par exemple, est la valeur moyenne des gains, pondérés par leur probabilité d'occurrence. Ce concept a été forgé par Blaise Pascal et Pierre de Fermat lorsqu'ils ont jeté les bases de la théorie des probabilités au milieu du XVII^e^ siècle. L'espérance répondait alors à la question posée par un de leurs amis joueurs, Antoine Gombaud, chevalier de Méré, qui voulait évaluer le gain qu'il pouvait espérer s'il interrompait la partie d'un jeu de hasard avant sa fin. Dès sa conception, cette notion d'espérance faisait donc écho à des préoccupations profondément économiques, le jeu de hasard offrant une modélisation d'une prise de décision dans l'incertitude, proche de celle d'un investisseur ou d'un spéculateur en Bourse.

1. Pour le mathématicien, les expressions « espérance infinie » et « absence d'espérance » sont équivalentes, alors qu'elles sont opposées dans le langage courant. De même, les expressions mathématiques « variance infinie » et « absence de variance » sont équivalentes.

Le premier exemple d'extrême a été identifié et étudié très peu de temps après que les premières bases des probabilités furent posées. En 1713, Nicolas Bernoulli [1] soumit à ses collègues de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg un problème issu d'un jeu de hasard, une variante du jeu de pile ou face mais dont la solution est paradoxale, d'où son nom : paradoxe de Saint-Pétersbourg. Bien que simple en apparence, il constitue un modèle pour beaucoup de phénomènes économiques extrêmes, comme l'évaluation d'une *start-up* dans le secteur des nouvelles technologies.

Imaginons un casino dans lequel une pièce est lancée n fois consécutives jusqu'à ce qu'elle tombe sur face. Le nombre n de lancers est aléatoire puisque à chaque lancer il y a une chance sur deux pour que face sorte. Lorsque face sort, le joueur reçoit un gain égal à 2^{n-1} unités monétaires. Par construction, n–1 est égal au nombre de pile consécutives. Ainsi, si face sort au premier lancer, le jeu s'arrête et le joueur reçoit $2^{1-1} = 2^0 = 1$; si face sort au 2e lancer, il reçoit $2^{2-1} = 2$; si face sort au 3e lancer, il reçoit $2^{3-1} = 4$, etc. Étant donné que le joueur est sûr de gagner au moins 1, le problème posé par ce jeu est celui du montant du droit d'entrée que le joueur doit payer au casino pour que le jeu soit équilibré entre eux. La réponse paradoxale est que le droit d'entrée est infini. En effet, il y a une chance sur deux (probabilité = 1/2) pour que face sorte au premier lancer avec un gain égal à 1 ; une chance sur quatre (probabilité = 1/4) pour que face sorte au deuxième lancer avec un gain égal à $2^1 = 2$;

1. Nicolas Bernoulli (1687-1759) est le neveu de l'auteur de la première démonstration de la loi des grands nombres, Jacques Bernoulli (1654-1705).

une chance sur huit (probabilité = 1/8) pour que face sorte au troisième lancer avec un gain égal à $2^2 = 4$, etc.

Puisque, dans la règle du jeu, le nombre n de lancers est illimité, l'espérance, égale à la somme des gains potentiels, pondérés par les probabilités correspondantes, tend vers l'infini :

$$1 \times (1/2) + 2 \times (1/4) + 4 \times (1/8) + \ldots + 2^{n-1} \times (1/2^n)$$
$$= ½ + ½ + ½ + \ldots = n/2 \to \infty \text{ quand } n \to \infty$$

Ce résultat est d'autant plus paradoxal qu'il y a une disproportion évidente entre le montant infini du droit d'entrée et la durée moyenne d'une partie, qui est égale à deux lancers seulement, en raison de la loi des grands nombres.

Bien sûr, aucun joueur n'est capable d'accepter un droit d'entrée infini et aucun casino n'est assez riche pour organiser une pareille loterie en ne limitant pas à l'avance le nombre de lancers autorisés [1]. Sans cette limite, le jeu

1. Daniel Bernoulli (1700-1782), cousin de Nicolas, adressa en 1738 à cette même Académie des sciences « pétropolitaine » un mémoire dans lequel il imagina rendre ce jeu effectivement jouable sans limiter – à l'avance – le nombre de lancers. Il fit l'hypothèse réaliste que le joueur n'évalue pas ses gains en unités monétaires mais en unités d'utilité subjective. Si le joueur est riche, le gain d'une unité monétaire ne lui est pas utile. S'il est pauvre, en revanche, il lui est très utile. Bernoulli introduisit alors le concept d'espérance d'utilité, dite espérance morale, qui prend en compte la richesse du joueur. Lorsque l'utilité du joueur est égale au logarithme du gain, hypothèse faite par Bernoulli, cette espérance morale est très faible, elle est inférieure à deux unités monétaires. Beaucoup de joueurs seraient prêts à payer ce modeste droit d'entrée. Mais cette solution ne rend pas le jeu jouable pour autant. Aucun casino ne peut accepter d'engager une partie à durée indéterminée, susceptible de lui coûter très cher en argent sonnant et trébuchant, en contrepartie d'un droit d'entrée très faible. Il est sûr d'être ruiné rapidement (P. Samuelson [1977]). Nous verrons dans le chapitre 2 de la première partie qu'il existe une

est injouable. D'ailleurs, pour beaucoup d'économistes et de statisticiens, cet exemple artificiel relève de la galerie des curiosités mathématiques dénuées d'applications concrètes. Il est pourtant joué sous sa forme originelle, non pas dans un casino imaginaire, mais dans la réalité. En effet, la structure de ce jeu de hasard est semblable à celle de nombreux phénomènes économiques, ceux dont le déroulement dans le temps est aléatoire et dont les gains croissent à un rythme similaire ou du moins comparable à celui du jeu. Dans le jeu originel, les gains doublent à chaque lancer, le taux de croissance des gains est donc égal à 100 %, ce qui est considérable. Mais on peut construire un exemple équivalent avec n'importe quel taux de croissance réaliste inférieur à 100 % du moment que la probabilité de continuer à jouer décroît à un taux égal ou inférieur au taux de croissance des gains.

Prenons l'exemple d'une entreprise dont le chiffre d'affaires croît chaque année de 8,7 % et dont la croissance soit se poursuit chaque année avec la probabilité 1/1,087 = 0,92, soit s'arrête. Son taux de croissance tombe alors à zéro avec la probabilité 0,08. Cet exemple théorique peut être le modèle d'une *start-up* dans le secteur des technologies innovantes : forte croissance, le chiffre d'affaires double tous les 8 ans environ ; forte probabilité de succès annuel, 0,92 ; mais risque d'un arrêt brutal et définitif de la croissance à une date future indéterminée. L'espérance du chiffre d'affaires de cette entreprise, au bout de n années de croissance ininterrompue, est encore infinie :

variante jouable de ce jeu. Elle suppose un grand nombre de parties simultanées, alors que la version originelle porte sur une partie unique.

$$1{,}087 \times 0{,}92 + (1{,}087 \times 0{,}92)^2 + (1{,}087 \times 0{,}92)^3 + \dots + (1{,}087 \times 0{,}92)^n = 1 + 1 + 1 + \dots = n \to \infty$$

Pour redonner une valeur finie à l'espérance, il aurait fallu fixer à l'avance le nombre d'années de croissance ininterrompue. Mais qui peut déterminer avec certitude la date d'arrêt de la croissance ?

Dans le jeu de Saint-Pétersbourg, 90 % au moins des parties sont courtes et même très courtes (rappelons la durée moyenne du jeu : 2 lancers) ; en revanche, quelques-unes, une dizaine sur plusieurs milliers, un millier sur plusieurs millions, sont extrêmement longues ($n>10$) et rapportent des gains très importants. C'est la propriété caractéristique des valeurs extrêmes. Elles sont rares, mais elles sont engendrées par le même processus que celui qui génère un grand nombre de valeurs faibles. C'est aussi le cas de la valeur d'un réseau de télécommunication.

Exemple récent d'extrême sans espérance : la valeur d'un réseau

Plus le nombre de membres d'un réseau de télécommunication (téléphone, Internet, Facebook, etc.) est élevé, plus le nombre de communications est élevé, plus le trafic est élevé et donc plus le chiffre d'affaires est important, du moins si les communications sont payantes ou s'il y a de la publicité. Si N est le nombre de membres du réseau, le trafic potentiel est égal à $N(N-1)$. Par exemple, un réseau de trois membres – dénommés A, B, C – peut engendrer six liaisons : A vers B, A vers C, B vers A, B vers C, C vers A et C vers B. Un réseau de dix membres peut théoriquement engendrer quatre-vingt-dix liaisons. Ces chiffres sont des maxima, car toutes les combinaisons ne seront pas actives. Mais ils sont à la source des anticipations des investisseurs qui ont financé les entreprises du secteur des nouvelles technologies de l'information et de la communication (NTIC), pendant la fameuse « bulle » Internet, entre 1997 et l'an 2000. En effet, si l'on admet que la probabilité de doubler le nombre d'abonnés varie comme dans le jeu de Saint-Pétersbourg, l'espérance du trafic tend très rapidement vers l'infini, puisqu'elle croît avec le carré du nombre d'abonnés :

$$0 \times (1/2) + 2 \times (1/4) + 12 \times (1/8) + 56 \times (1/16) \\ + 240 \times (1/32) + 992 \times (1/64) + \ldots + (2^{n-1} - 1)/2 \\ = 1/2 + 3/2 + 7/2 + 15/2 + 31/2 + \ldots = \rightarrow \infty$$

Certes, le nombre d'abonnés ne peut pas atteindre l'infini, puisqu'il est nécessairement limité. Mais, dans un secteur nouveau, nul ne peut prévoir quelle sera la limite effective avant de l'avoir atteinte. Toutes les spéculations sont donc possibles [1].

L'absence d'espérance peut expliquer à la fois les cours démesurés observés sur les marchés boursiers des valeurs technologiques, avant le krach de l'an 2000, et la brutalité de la chute des cours pendant le krach. Les investisseurs ont anticipé des gains gigantesques pendant la « bulle », d'où les hausses. Mais le ralentissement de la progression du parc d'abonnés, voire son arrêt, a

1. L'espérance du trafic reste infinie même si la probabilité de doubler le nombre d'abonnés à chaque lancer est plus petite que ½. Il suffit qu'elle soit au moins égale à $1/(2^{2n} - 2^{n})$. Cette petite probabilité de succès conforte malgré tout les spéculations les plus folles, car elle donne l'espoir de gagner un gros lot avec une probabilité beaucoup plus grande que celle offerte par le Loto actuel (une chance sur dix-neuf millions environ) ou l'Euro Millions (environ une chance sur soixante-seize millions).

fortement réduit l'espérance du trafic, qui ne pouvait plus être infinie. D'où la déception des investisseurs et leur retrait du marché, précipitant la chute des cours pendant le krach. Conséquence ultime du caractère extrême de la valeur potentielle d'un réseau : un petit nombre d'opérateurs de télécommunications ayant réussi des parties très longues ont survécu en devenant des géants, créant ainsi des oligopoles puissants, tandis que la plupart des entreprises concurrentes, sorties du jeu après deux ou trois lancers, ont végété ou ont disparu. Ces deux exemples de valorisation extrême sont empruntés au secteur des nouvelles technologies de l'information et de la communication. Mais il ne faudrait pas en conclure que ce secteur est un cas exceptionnel. L'exemple de la formation des files de voitures sur les routes montre que la vie quotidienne de millions d'automobilistes peut être confrontée à des extrêmes sans espérance.

Exemple banal d'extrême sans espérance : la longueur des files de voitures

Cet exemple d'extrême est d'autant plus important dans nos économies qu'il concerne l'automobile, l'un des piliers de notre mode de vie. Tout automobiliste sait par expérience que la longueur des files de voitures peut être démesurée et que ces files sont dangereuses. Lorsqu'une des voitures prisonnières ralentit soudainement ou s'arrête, les voitures qui la suivent dans la file peuvent se heurter et provoquer un carambolage, accident collectif bien connu des responsables de la sécurité routière et des assureurs. Si nous admettons que chaque automobiliste roule à vitesse constante, différente pour chacun d'entre eux, et si nous posons qu'ils ne peuvent pas doubler ou changer de file, une file de n voitures se forme dès qu'une voiture roule moins vite que celles qui la suivent.

Si l'on choisit au hasard une voiture, la probabilité pour qu'une file se forme derrière cette voiture avec une longueur *supérieure ou égale* à n est égale à 1/n, ou – ce qui revient au même – la probabilité pour qu'une file ait une longueur *inférieure* à n est égale à (1 – 1/n).

En voici une démonstration heuristique [1]. Soit n le nombre de voitures présentes sur la route, y compris la voiture choisie au hasard.

Lorsque n = 1, on a évidemment une file de longueur n = 1. Autrement dit, il y a une probabilité égale à zéro pour qu'une file de *moins* de une voiture se forme.

Lorsque n = 2, il y a une chance sur deux pour que la file ait une longueur n = 1 et une chance sur deux pour qu'elle ait une longueur n = 2. Le premier cas se présente lorsque la voiture choisie au hasard est la plus lente et est en deuxième position, le second cas se présente quand elle est en tête. Donc, la probabilité pour qu'une file de *moins* de deux voitures se forme est égale à un demi.

Lorsque n = 3, le nombre de combinaisons augmente sensiblement, puisqu'il y a six cas de figure. La voiture la plus lente peut être en tête, en queue ou entre les deux autres. De même, l'une des deux autres voitures peut être plus rapide que l'autre et peut se trouver en tête, en queue ou entre les deux autres, etc. Le décompte des six combinaisons possibles avec trois voitures montre qu'une

1. Gordon F. Newell [1959] en donne la démonstration mathématique rigoureuse. William Feller [1966] donne cet exemple en exercice à ses lecteurs.

file de longueur n = 1 se forme dans un cas sur six (la voiture choisie au hasard est la dernière et n'est donc suivie par aucune autre voiture), tandis qu'une file de longueur n = 2 se forme dans trois cas sur six (la voiture choisie au hasard est au milieu) et qu'une file de longueur n = 3 se forme dans deux cas sur six (la voiture choisie au hasard est la première de la file). Autrement dit, la probabilité pour qu'une file de *moins* de trois voitures se forme est égale à quatre sur six, soit deux tiers.

On obtient un résultat semblable avec quatre voitures, auquel cas il y a vingt-quatre combinaisons possibles, engendrant quatre longueurs possibles de file, de une à quatre voitures. La probabilité pour qu'une file de moins de quatre voitures se forme est égale à trois quarts. Avec un peu de patience et d'obstination, on peut généraliser à cinq puis à six voitures, etc. Le résultat est toujours le même. La probabilité pour qu'une file de longueur *inférieure* à n se forme est égale à 1 – 1/n. Cela revient à dire que la probabilité pour qu'une file de longueur *égale ou supérieure* à n se forme est égale à [1 – (1 – 1/n)] = 1/n. Par exemple, il y a une chance sur dix pour qu'une file, derrière la voiture choisie au hasard, contienne au moins dix voitures et une chance sur mille pour que cette file contienne au moins mille voitures, etc.

Lorsque n croît, la probabilité 1/n correspondante ne décroît que très lentement. De fait, si la plupart des files sont courtes, il se produit de temps en temps un carambolage entre plusieurs centaines de véhicules, car la probabilité d'un tel événement n'est pas négligeable. Ce genre de carambolage, souvent qualifié de « monstre », n'a rien par nature qui puisse le distinguer des autres carambolages. Il est le résultat inévitable et malheureux de la différence de vitesse entre les automobilistes. Quant à la longueur moyenne d'une file, un calcul mathématique d'intégration, que nous ne développerons pas,

Mise en page par Meta-systems
59100 Roubaix

N° d'édition : L.01EHQN000309.N001
Dépôt légal : octobre 2009