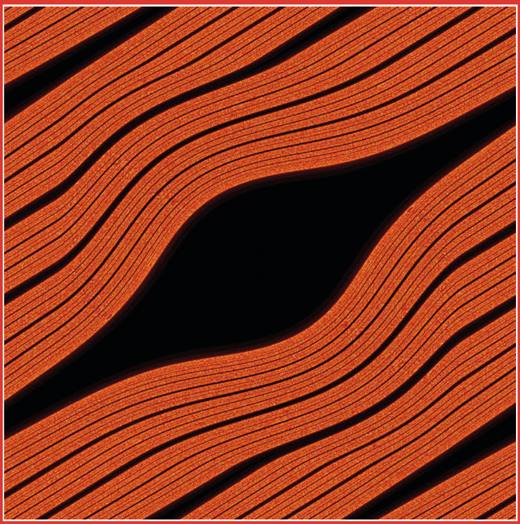
SAVOIRS MATHÉMATIQUES ACTUELS

THÉORIE ERGODIQUE ET SYSTÈMES DYNAMIQUES



YVES COUDÈNE

edp sciences

CNRS ÉDITIONS

Extrait de la publication

Yves Coudène

Théorie ergodique et systèmes dynamiques

SAVOIRS ACTUELS
EDP Sciences/CNRS Éditions

Extrait de la publication

Y. Coudène
Département de mathématiques
Université de Bretagne Occidentale
6 avenue Le Gorgeu
29238 Brest Cedex 3
France
E-mail : yves.coudene@univ-brest.fr

Illustration de couverture : Un attracteur dérivé d'Anosov,
étudié au chapitre 9.

Imprimé en France.

© **2012, EDP Sciences**, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf, 91944 Les Ulis Cedex A
et
CNRS Éditions, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

ISBN EDP Sciences 978-2-7598-0760-4
ISBN CNRS Éditions 978-2-271-07603-8

TABLE DES MATIÈRES

Extrait de la publication

Partie II. Systèmes dynamiques

Extrait de la publication

Partie III. Théorie de l'entropie

Partie IV. Décomposition ergodique

Extrait de la publication

INTRODUCTION

Mais malheur à l'auteur qui veut toujours instruire !
Le secret d'ennuyer est celui de tout dire.
Voltaire (1694–1778)

Ces notes sont issues d'un cours de Master 2 donné à l'université de Rennes 1 pendant la période 2005–2008. Il s'agissait d'un cours d'introduction à la théorie ergodique et aux systèmes dynamiques ; le but était de présenter quelques idées générales qui sont à la base de ces deux théories, avant que les étudiants ne se spécialisent en suivant des cours plus approfondis.

Le cours était composé de douze séances de deux heures chacune ; il m'a paru judicieux de focaliser chaque séance sur un concept particulier et de faire en sorte que les différentes séances soient largement indépendantes entre elles. De fait, le matériel présenté est à l'intersection de théories mathématiques très diverses et l'auditoire intéressé par le sujet est souvent composé d'étudiants et de chercheurs d'horizons très différents : probabilistes, dynamiciens, géomètres, physiciens, etc.

Chaque chapitre commence par une présentation informelle des concepts et des problèmes que l'on cherche à résoudre. Viennent ensuite les définitions rigoureuses et les démonstrations, que l'on a cherché à illustrer par des exemples à la fois simples et pertinents. Les figures forgent l'intuition du lecteur tandis que les exercices lui permettent de tester sa compréhension du sujet. Il m'a semblé intéressant de rajouter quelques commentaires à la fin de chaque chapitre, afin de remettre le matériel étudié dans son contexte historique, présenter quelques problèmes actuels et orienter le lecteur dans la littérature, en fonction de ses intérêts propres. Ces commentaires sont plutôt destinés à une seconde lecture et supposent une certaine maîtrise des concepts présentés dans ce livre.

Extrait de la publication

Pour ce qui est du contenu, j'ai voulu insister sur les idées plus que sur les aspects théoriques, sur les exemples plus que sur la technique. Il existe plusieurs livres présentant les théories générales avec un grand luxe de détails, aussi bien dans le domaine des systèmes dynamiques que dans celui de la théorie ergodique. Ces notes n'ont pas vocation à les remplacer. J'ai donné pour quelques résultats classiques des preuves nouvelles ou inhabituelles, afin d'illustrer certains aspects méconnus du sujet. Ces preuves sont susceptibles d'intéresser même les chercheurs les plus aguerris. Le lecteur est bien sûr invité à consulter les ouvrages de référence pour prendre connaissance des approches plus classiques, qui sont résumées dans les commentaires.

Thèmes abordés

Théorie ergodique et systèmes dynamiques sont deux théories qui vont très bien ensemble. La première apporte à la seconde ses résultats quantitatifs les plus remarquables, tandis que la seconde est une pourvoyeuse infatigable d'exemples prompts à infirmer les conjectures les plus chères à la première. Toutes deux nées au début du vingtième siècle, au moins d'un point de vue mathématique et moderne, sous la houlette d'un des géants du siècle, Henri Poincaré (1854–1912), elles ont connu un développement soutenu jusqu'à aujourd'hui. Les ouvrages qui prétendent rendre compte d'une part non négligeable de ces théories sont susceptibles, de par leur taille et leur style, d'effrayer même les étudiants les plus motivés.

Ce livre a été écrit dans le but d'être accessible au plus grand nombre, de susciter l'intérêt pour un domaine très actif des mathématiques, et peut servir d'introduction à la littérature plus avancée.

Les grands problèmes que l'on cherche à élucider n'ont pas tellement évolué en un siècle. Prenons l'exemple d'une application qui agit sur un certain espace de configurations X. Les points de X représentent les différents états que peut prendre le système au cours de son mouvement. Partant d'une configuration initiale donnée par un point x de X, les itérés de x correspondent aux états successifs que visite le système au cours de son évolution. Ce livre s'intéresse aux questions suivantes :

– *Le système repasse-t-il près de son état initial au cours de son évolution ?*

C'est ce qu'essaient de formaliser les concepts de récurrence et de non-errance, aussi bien sur le plan quantitatif (mesure) que sur le plan qualitatif (topologie).

– *Est-il possible de construire une représentation du système dans laquelle l'évolution prend une forme particulièrement simple à décrire ?*

Les notions de conjugaison locale ou globale, d'isomorphisme, de codage et de modèle symbolique cherchent chacune, à leur façon, à mettre le système sous une forme où l'évolution peut être effectivement calculée.

– *Le système peut-il évoluer de manière à se rapprocher d'un état donné* a priori*, si on le perturbe au cours de son évolution ?*

Ce thème est prépondérant en dynamique hyperbolique, où l'existence d'instabilités locales, modélisées par les variétés stables et instables, conduit à un comportement uniforme du système, stable par perturbation.

– *Dans quelle mesure l'évolution du système peut-elle être prédite à long terme, ou encore quelle quantité de hasard le système est-il susceptible de simuler ?*

Le concept d'entropie, introduit en 1958 par A. N. Kolmogorov en théorie des systèmes dynamiques, a permis de faire des progrès décisifs sur cette question.

Plan de l'ouvrage

Les quatre premiers chapitres sont consacrés à des résultats de théorie ergodique (récurrence, ergodicité, mélange), illustrés par des exemples de nature algébrique, mécanique ou probabiliste : flots hamiltoniens, décalages de Bernoulli, automorphismes des tores, flots sur $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$, etc. On a cherché à mettre en valeur le rôle joué par la topologie faible dans les questions d'ergodicité et de mélange ; les propriétés de cette topologie sont rappelées en annexe. Le quatrième chapitre présente l'argument de Hopf, un des arguments fameux de la théorie hyperbolique des systèmes dynamiques.

Les cinq chapitres suivants sont dédiés à la dynamique des transformations, d'un point de vue topologique. On introduit les concepts de non-errance, de transitivité et de conjugaison, illustrés par la construction de quelques transformations de type Morse-Smale et par l'étude de la dynamique de quelques polynômes (exemples de Schröder). Le théorème de linéarisation de Hartman-Grobman permet d'analyser le comportement du système au voisinage de ses points périodiques hyperboliques ; on l'applique à l'étude d'un système obtenu par perturbation d'un automorphisme du tore (dit dérivé d'Anosov).

Trois chapitres sont consacrés à l'entropie. On démontre le théorème de Kolmogorov-Sinaï sur les partitions génératrices. Comme application, on calcule l'entropie des applications dilatantes (formule de Rokhlin) et de quelques applications de l'intervalle. Un chapitre est consacré à l'interprétation de l'entropie en théorie de l'information.

Les notions d'espace de Lebesgue et de décomposition ergodique sont étudiées dans les trois derniers chapitres. Ces notions importantes sont rarement traitées en détail dans la littérature. L'objectif de ces chapitres est

Extrait de la publication

de présenter le théorème de décomposition ergodique de manière claire, concise et complète. Pour ce faire, on s'est inspiré de l'argument de Hopf, en construisant les composantes ergodiques de manière « géométrique ».

À qui s'adresse ce livre

Ce livre peut être abordé par un étudiant de master, qui a suivi un cours de théorie de la mesure et possède le vocabulaire de la théorie des espaces de Hilbert. Quelques exemples nécessitent une certaine familiarité avec les notions de flots et de variétés différentielles.

Le chercheur qui désire se familiariser avec les problématiques à l'interface des systèmes dynamiques et de la théorie ergodique peut aussi tirer profit de ce texte, par le biais des commentaires situés en fin de chapitre. Ceux-là donnent un bref aperçu des problèmes et des méthodes qui ont marqué la théorie, et mentionnent quelques questions ouvertes dans le domaine.

Ce livre comporte des annexes qui résument des résultats ne faisant pas nécessairement partie du cursus de licence ou de master. On fait usage dès le premier chapitre de la topologie faible dans le cadre des espaces de Hilbert. Les propriétés de cette topologie sont rappelées dans la première annexe. La seconde annexe est consacrée à la notion d'espérance conditionnelle.

Certains aspects de la théorie des espaces métriques et de la théorie de la mesure ne sont pas abordés en licence sous leur forme la plus générale : séparabilité, support, régularité, densité des fonctions lipschitziennes dans les espaces L^p. Ils sont détaillés dans l'annexe suivante. Si le lecteur n'est pas familier avec ces résultats, il est préférable de les admettre en première lecture. Ils deviennent plus ou moins évidents dès l'instant où l'on travaille sur des ouverts de $\mathbf{R}^n$ avec des mesures du type $f(x)\,\mathrm{d}x$; c'est avec ce genre d'espace en tête que le lecteur est invité à commencer sa lecture.

Extrait de la publication

PARTIE I

THÉORIE ERGODIQUE

Extrait de la publication

This page intentionally left blank

CHAPITRE 1

THÉORÈME ERGODIQUE EN MOYENNE

The most useful piece of advice I would give to a mathematics student is always to suspect an impressive sounding theorem if it does not have a special case which is both simple and non trivial.

M. F. Atiyah

1. Introduction

La théorie ergodique est l'étude du comportement à long terme des systèmes préservant une certaine forme d'énergie.

D'un point de vue mathématique, un système physique peut être modélisé par la donnée d'un espace X, d'une transformation $T : X \to X$ et d'une mesure μ définie sur X, invariante par T : pour tout ensemble mesurable $A \subset X$, $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$. Le quadruplet formé de l'espace X, de la mesure μ, de la tribu des ensembles mesurables relativement à μ et de la transformation mesurable T qui préserve μ forme ce que l'on appelle un *système dynamique mesuré*.

L'espace X est composé de l'ensemble de tous les états que peut prendre le système au cours de son évolution. La transformation T décrit son évolution au cours du temps ; $T(x)$ est l'état dans lequel se trouve le système au temps 1 s'il se trouvait dans l'état x au temps 0. Les itérés successifs $T^2(x)$, $T^3(x), \ldots$ donnent l'état du système aux temps $2, 3, \ldots$ Enfin, la mesure μ correspond à n'importe quelle quantité extensive, définie sur l'espace X, et préservée au cours du mouvement.

L'exemple de base vient de la mécanique classique. Il est donné par un point matériel se déplaçant sous l'action d'un potentiel indépendant du temps. L'ensemble $X = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ est l'espace (x, v) des positions-vitesses, aussi appelé espace des phases. La transformation T associe à la condition initiale (x, v) les valeurs de position et de vitesse après un laps de temps donné, par exemple 1 seconde, 1 jour ou 1 année, selon les échelles de temps étudiées. Enfin, la mesure μ est le volume standard $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v$ défini sur l'espace X. Son invariance se déduit de la préservation de l'énergie.

On cherche à déterminer le comportement de la suite des itérés $T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T$. La remarque suivante, due à B. O. Koopman (1931), est cruciale pour la suite. Si l'on fait opérer par composition la transformation T sur l'espace $L^2(X, \mu)$ des fonctions de carré intégrable, l'application U obtenue est une isométrie linéaire : si $f \in L^2$ et $Uf = f \circ T$, alors $\|Uf\| = \|f\|$. Cela découle de l'invariance de μ par T. On peut donc appliquer les techniques d'analyse hilbertienne pour étudier le comportement « en moyenne » de la suite $f \circ T^n$, c'est-à-dire son comportement en norme L^2.

En passant à l'action sur l'espace L^2, on a remplacé un problème *a priori* non linéaire, en dimension finie, par un problème linéaire en dimension infinie. A-t-on vraiment gagné au change ? Il se trouve que les espaces de Hilbert possèdent un certain nombre de propriétés réminiscentes de la dimension finie. La plus utile est la compacité faible de la boule unité. Montrer une convergence faible revient donc à identifier la limite par le biais d'une propriété qui la caractérise de manière unique, tâche qui s'avère plus simple que celle de montrer la convergence.

Ces méthodes hilbertiennes permettent d'obtenir la convergence des moyennes $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k$, pour toute application linéaire U satisfaisant l'inégalité $\|Uf\| \leqslant \|f\|$, $f \in L^2$. Ce résultat, initialement obtenu par J. Von Neumann (1932) dans un contexte un peu différent par des méthodes de calcul fonctionnel, illustre un fait fréquemment utilisé en analyse, comme quoi « moyenner tend à régulariser ».

Voici une conséquence du théorème ergodique : si l'espace X est de mesure finie, alors presque toute trajectoire revient arbitrairement près de son état initial. C'est l'une des rares conclusions générales que l'on puisse faire sur le caractère du mouvement en mécanique classique. Antérieur au théorème ergodique, ce résultat, démontré par H. Poincaré en 1899, est souvent considéré comme le premier résultat mathématique de la théorie ergodique, et marque la naissance de cette discipline.

2. Théorème ergodique en moyenne

Théorème 1. *Soit H un espace de Hilbert et $U : H \to H$ une application linéaire satisfaisant : $\forall f \in H$, $\|Uf\| \leqslant \|f\|$. Posons $S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} U^k f$,* $\mathrm{Inv} = \{f \in H \mid Uf = f\}$. *Notons $P : H \to H$ le projecteur orthogonal sur le sous-espace* Inv *des vecteurs U-invariants. Alors :*

$$\frac{1}{n} S_n(f) \longrightarrow Pf \quad \textit{en norme.}$$

Extrait de la publication

La preuve que nous allons présenter est basée sur un argument de R. Mañé et fait appel à la topologie faible dans les espaces de Hilbert. Les propriétés de cette topologie sont détaillées dans l'annexe A. La preuve fait aussi appel à l'adjoint U^* de l'application U. Rappelons que cet adjoint est une application linéaire de H dans H définie par l'égalité :

$$\langle U^* f, g\rangle = \langle f, Ug\rangle.$$

Il satisfait les relations : $(U^*)^* = U$ et $\|U^*\| = \|U\|$. Lorsque cette norme est majorée par 1, nous allons démontrer que U^* a les mêmes vecteurs invariants que U.

Lemme 1. *Sous les hypothèses du théorème, tout élément $g \in H$ invariant par U est invariant par U^*. De même, tout élément $g \in H$ invariant par U^* est invariant par U.*

Preuve du lemme. Supposons g invariant : $Ug = g$. L'égalité $U^* g = g$ découle du calcul suivant :

$$\|g - U^* g\|^2 = \|g\|^2 + \|U^* g\|^2 - 2\langle g, U^* g\rangle \leqslant 2\|g\|^2 - 2\langle Ug, g\rangle = 2\langle g - Ug, g\rangle.$$

Il suffit de remplacer U par U^* dans le calcul qui précède pour montrer que tout élément $g \in H$ invariant par U^* est invariant par U. □

Preuve du théorème. Si f appartient à Inv, on a $\frac{1}{n} S_n(f) = f$ et le théorème est satisfait. Il suffit de montrer que $\frac{1}{n} S_n(f)$ tend vers 0 pour $f \in \mathrm{Inv}^\perp$. Remarquons que Inv et $\mathrm{Inv}^\perp$ sont des espaces invariants à la fois par U et U^* en vertu du lemme.

On a l'égalité :

$$\|\tfrac{1}{n} S_n(f)\|^2 = \langle f, \tfrac{1}{n} S_n^* \tfrac{1}{n} S_n(f)\rangle.$$

Il s'agit donc de vérifier, pour tout $f \in \mathrm{Inv}^\perp$, que la suite $\frac{1}{n} S_n^* \frac{1}{n} S_n(f)$ converge faiblement vers 0, ou encore que les valeurs d'adhérence de cette suite sont toutes nulles. Comme elles sont dans $\mathrm{Inv}^\perp$, il suffit de montrer qu'elles sont invariantes par U ou par U^*, d'après le lemme. Pour cela, on remarque que l'on a l'égalité, pour tout $h \in H$,

$$(I - U^*)\, \tfrac{1}{n} S_n^*\, h = \frac{1}{n}(I - U^*) \sum_{k=0}^{n-1} U^{*k}\, h = \frac{1}{n}(I - U^{*n})\, h.$$

Prenons $h = \frac{1}{n} S_n(f)$; on a la majoration suivante :

$$\|(I - U^*)\, \tfrac{1}{n} S_n^*\, \tfrac{1}{n} S_n(f)\| \leqslant \frac{1}{n}\, \|(I - U^{*n})\| \cdot \|\tfrac{1}{n} S_n(f)\| \leqslant \frac{2}{n}\, \|f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

La convergence en norme implique la convergence faible. Par conséquent, toute valeur d'adhérence faible de la suite $\frac{1}{n} S_n^* \frac{1}{n} S_n(f)$ est invariante par U, comme désiré. □

Extrait de la publication

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Prenons pour H l'espace $L^2(X)$ des fonctions mesurables à valeurs réelles de carré intégrable. À partir d'une application mesurable $T : X \to X$ on définit une application linéaire $U : H \to H$ en posant $Uf = f \circ T$. Si T préserve la mesure μ, l'opérateur U vérifie $\|Uf\| = \|f\|$. Nous pouvons appliquer ce qui précède afin d'obtenir le théorème ergodique L^2 :

***Théorème 2* (Von Neumann).** *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, soit $T : X \to X$ une application mesurable qui préserve μ et $f \in L^2(X)$. Alors*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} Pf$$

où P est le projecteur orthogonal sur le sous-espace $\{f \in L^2 \mid f \circ T = f\}$.

Une fonction mesurable $f : X \to \mathbf{R}$ qui satisfait $f \circ T = f$ est dite *invariante* par la transformation T. Soient A un ensemble mesurable et $T^{-1}A$ l'ensemble des points de X dont l'image appartient à A. L'ensemble A est dit *invariant* par T s'il satisfait la relation $T^{-1}A = A$. Sa fonction caractéristique est alors invariante par T :

$$\mathbf{1}_A \circ T = \mathbf{1}_{T^{-1}A} = \mathbf{1}_A.$$

Les ensembles mesurables invariants par T forment une tribu qui sera notée $\mathcal{I}$ dans la suite. Montrons que les fonctions invariantes sont précisément les fonctions qui sont mesurables relativement à cette tribu $\mathcal{I}$.

Proposition 1. *Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $T : X \to X$ une application mesurable qui préserve μ et $f : X \to \mathbf{R}$ une fonction mesurable. Alors f est invariante par T si et seulement si elle est mesurable relativement à la tribu formée par les ensembles invariants.*

Preuve. Une fonction f est mesurable par rapport à $\mathcal{I}$ précisément lorsque ses ensembles de niveau $f^{-1}(y)$ sont invariants par T, c'est-à-dire lorsque nous avons l'égalité $T^{-1}f^{-1}(y) = f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbf{R}$. Mais cette relation est équivalente à l'égalité $f(T(x)) = f(x)$ pour tout $x \in X$ satisfaisant $f(x) = y$. □

On s'intéresse maintenant aux propriétés du projecteur P défini plus haut. Ce projecteur est orthogonal, comme illustré par la figure 1.

***Propriétés du projecteur* P.**

– $\forall f \in L^2, \forall g \in L^2$ tel que $g \circ T = g$, $\int Pf\, g \,\mathrm{d}\mu = \int f\, g \,\mathrm{d}\mu$

– $\forall f \in L^2, \forall A \subset X$ tel que $T^{-1}A = A$ et $\mu(A) < \infty$, $\int_A Pf \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu$

– $\forall f \in L^2$ tel que $f \geqslant 0$, $Pf \geqslant 0$.

Extrait de la publication

De plus, si $\mu(X) < \infty$,

– $\forall f \in L^2, \quad \int Pf \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu$

– $\forall f \in L^2$ tel que $f \geqslant 0$, pour presque tout $x \in X$, l'inégalité $f(x) > 0$ implique $Pf(x) > 0$.

Preuve. Le projecteur P est orthogonal, il est égal à son adjoint : $P = P^*$. Cela implique :

$$\int Pf\, g \,\mathrm{d}\mu = \langle Pf, g\rangle = \langle f, P^* g\rangle = \langle f, Pg\rangle = \int f\, g \,\mathrm{d}\mu.$$

Cela démontre le premier point, le second s'obtient à partir de cette égalité en prenant $g = \mathbf{1}_A$, et le cas $A = X$ correspond au quatrième point.

Montrons maintenant les inégalités. Pour tout $N > 0$, on a la majoration

$$\mu(\{x \mid Pf(x) < -1/N\}) \leqslant N^2 \int |Pf|^2 \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

ce qui entraîne :

$$-\frac{1}{N}\,\mu(\{x \mid Pf(x) < -\tfrac{1}{N}\}) \geqslant \int_{\{Pf(x) < -\frac{1}{N}\}} Pf \,\mathrm{d}\mu = \int_{\{Pf(x) < -\frac{1}{N}\}} f \,\mathrm{d}\mu \geqslant 0.$$

On en déduit $\mu(\{x \mid Pf(x) < -1/N\}) = 0$, et donc $\mu(\{x \mid Pf(x) < 0\}) = 0$. Enfin, si la mesure de l'ensemble $\{x \mid Pf(x) = 0\}$ est finie, on a l'égalité

$$\int_{\{x \mid Pf(x)=0\}} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\{x \mid Pf(x)=0\}} Pf \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

La fonction f est donc nulle sur $\{x \mid Pf(x) = 0\}$ dès qu'elle est positive. □

Comme application, nous pouvons maintenant démontrer le théorème de récurrence de Poincaré, illustré par la figure 2.

Théorème 3. *Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $T : X \to X$ une application mesurable qui préserve μ. On suppose que $\mu(X) < +\infty$. Soit $B \subset X$ un ensemble mesurable. Alors pour presque tout $x \in B$, il existe une infinité de $n \in \mathbf{N}$ tels que $T^n(x) \in B$.*

Preuve. Rappelons que la convergence en norme L^2 implique la convergence presque sûre d'une sous-suite. Cette remarque, combinée au théorème ergodique, montre qu'il existe une sous-suite n_i, telle que pour presque tout $x \in X$, la somme $\frac{1}{n_i} S_{n_i} \mathbf{1}_B$ converge vers $P\mathbf{1}_B(x)$. Cette quantité est strictement positive pour presque tout $x \in B$, en vertu de la dernière propriété du projecteur P démontrée plus haut.

Si la trajectoire de x ne passe qu'un nombre fini de fois dans B, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_B(T^k(x)) \longrightarrow 0,$$

ce qui donne une contradiction. □

On peut démontrer le théorème de récurrence de Poincaré sans passer par le théorème ergodique.

Autre preuve. Posons

$$\overline{\mathbf{1}}_B(x) = \overline{\lim}\, \frac{1}{n} S_n(\mathbf{1}_B)(x) = \overline{\lim}\, \frac{1}{n} \operatorname{Card}\{0 \leqslant k \leqslant n-1 \mid T^k(x) \in B\}.$$

Cette fonction est invariante par la transformation T : $\quad \overline{\mathbf{1}}_B \circ T = \overline{\mathbf{1}}_B$.

$$\begin{aligned}
\mu\big(B \cap (\overline{\mathbf{1}}_B = 0)\big) &= \int \mathbf{1}_B \ \mathbf{1}_{(\overline{\mathbf{1}}_B = 0)} \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int \mathbf{1}_B \circ T^k \ \mathbf{1}_{(\overline{\mathbf{1}}_B = 0)} \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{pour tout } k \text{, par invariance,} \\
&= \int \frac{1}{n} S_n(\mathbf{1}_B)\, \mathbf{1}_{(\overline{\mathbf{1}}_B = 0)} \,\mathrm{d}\mu \quad \text{en prenant la moyenne sur } k, \\
&\leqslant \int \overline{\mathbf{1}}_B \ \mathbf{1}_{(\overline{\mathbf{1}}_B = 0)} \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{par le lemme de Fatou,} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pour presque tout $x \in B$, la fréquence $\overline{\mathbf{1}}_B(x)$ est non nulle, ce qui démontre le résultat. □

3. Application à la mécanique classique

La motivation première de H. Poincaré vient de la mécanique classique. Considérons un point matériel soumis à un champ de forces indépendant du temps. Si l'espace est clos et si l'énergie est conservée au cours du mouvement, on va montrer qu'il existe une mesure finie invariante dans l'espace des positions-vitesses. Nous serons alors en mesure d'appliquer le théorème de récurrence et nous pourrons affirmer que le système revient sûrement dans un état proche de son état initial.

Soit $V : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction C^2. Son gradient est noté ∇V dans la suite. L'énergie associée au potentiel V est donnée par :

$$\forall\, (x, v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n,\ E(x, v) = \tfrac{1}{2} m v^2 + V(x).$$

Supposons qu'il existe $E_0 \in \mathbf{R}$ tel que la surface d'énergie $E^{-1}(E_0)$ est compacte et $E^{-1}(E_0) \cap \{(x, 0) \mid \nabla V(x) = 0\} = \varnothing$. Alors :

– *Pour tout $(x_0, v_0) \in E^{-1}(E_0)$, l'équation différentielle :*

$$m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mv \\ -\nabla V(x) \end{pmatrix}$$

admet une unique solution $\varphi_t(x_0, v_0)$ satisfaisant $\varphi_0(x_0, v_0) = (x_0, v_0)$ et définie pour tout temps.

– *L'énergie E est constante le long des trajectoires du flot φ_t.*

Extrait de la publication

– *Notons* vol_{2n-1} *le volume riemannien porté par la variété* $E^{-1}(E_0)$. *La mesure borélienne* $\mathrm{d}\mu = \|\nabla E\|^{-1}\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_{2n-1}$ *est une mesure finie, invariante par les transformations* $(x,v) \mapsto \varphi_t(x,v)$, *pour tout* $t \in \mathbf{R}$. *Son support est égal à* $E^{-1}(E_0)$.

Le premier point découle des théorèmes généraux d'existence pour les équations différentielles ; ici on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour affirmer l'existence d'une solution sur un intervalle de temps ouvert. On établit ensuite l'invariance de l'énergie par un calcul élémentaire :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(\varphi_t(x)) = \Big\langle \nabla E, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t(x)\Big\rangle &= mv\,\frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial v}\,\nabla V(x)\\ &= mv\,\nabla V(x) - mv\,\nabla V(x) = 0.\end{aligned}$$

Une fois que l'on sait que la trajectoire est confinée à une partie compacte de l'espace des phases, les théorèmes d'existence usuels sur les équations différentielles permettent d'affirmer que les solutions sont définies pour tout temps.

L'invariance de la mesure est due à J. Liouville. Elle est illustrée sur la figure 3 et repose sur le résultat suivant.

Lemme 2. *Soient* φ_t *un flot* C^2 *défini sur un ouvert* U *de* $\mathbf{R}^d$ *et* X *le champ de vecteur associé :* $X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t(x)_{|t=0}$. *Soit* $f : U \to \mathbf{R}$ *une application intégrable, nulle hors d'un compact de* U. *Alors :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int f(\varphi_t(x))\,\mathrm{d}x\,{}_{|\,t=t_0} = \int f(\varphi_{t_0}(x))\,\mathrm{div}\,X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Preuve. En utilisant une partition de l'unité, on peut se restreindre au cas où f est C^1 à support compact, localisée dans un pavé $R = \prod_i [a_i, b_i]$. Quitte à remplacer f par $f \circ \varphi_{t_0}$, on peut supposer de plus $t_0 = 0$. Dérivons sous le signe somme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R f(\varphi_t(x))\,\mathrm{d}x = \int_R \langle \nabla f(x), X(x)\rangle\,\mathrm{d}x = \int_R \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot X_i\,\mathrm{d}x.$$

Puis effectuons une intégration par parties :

$$\int_R \frac{\partial f}{\partial x_i}\,X_i\,\mathrm{d}x = \int_R \frac{\partial (f\,X_i)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x - \int_R f\,\frac{\partial X_i}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int\cdots\int\Big(\int \frac{\partial (fX_i)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i\Big)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \int\cdots\int [f\,X_i]\,{}_{a_i}^{b_i}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = 0$$

en tenant compte du fait que la fonction f s'annule sur le bord de R. □

Nous pouvons maintenant montrer l'invariance du volume.

Extrait de la publication

4. Régularité intérieure

On s'intéresse maintenant à une propriété plus forte que la régularité extérieure.

Définition 22. Une mesure borélienne μ définie sur X est dite *intérieurement régulière* si pour tout borélien $A \subset X$ de mesure finie, et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un compact $K \subset A$ tel que $\mu(A \smallsetminus K) < \varepsilon$.

Cette propriété est satisfaite dès que l'espace sous-jacent est métrique séparable complet.

***Théorème 23* (Oxtoby-Ulam).** *Une mesure borélienne finie, définie sur un espace métrique séparable complet, est intérieurement régulière.*

Preuve. Soient $\{x_i\}$ une suite dense dans X et $n \in \mathbf{N}^*$. La famille de boules fermées $\overline{B}(x_i, 1/n)$, $i \in \mathbf{N}$, recouvre X si bien que l'on peut trouver $N \in \mathbf{N}$, dépendant de n, tel que

$$\mu\Big(X \smallsetminus \bigcup_{i=0}^{N} \overline{B}(x_i, 1/n)\Big) < \varepsilon/2^n.$$

Posons

$$K' = \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} \bigcup_{i=0}^{N} \overline{B}(x_i, 1/n).$$

Cet ensemble est fermé et précompact, il est donc compact. On a de plus l'inégalité : $\mu(K'^c) < \varepsilon$. Soit maintenant $A \subset X$ un borélien. Par régularité extérieure, on peut trouver $F \subset A$ fermé tel que $\mu(A \smallsetminus F) < \varepsilon$. Posons $K = K' \cap F \subset A$. Cet ensemble est compact et $\mu(A \smallsetminus K) < 2\varepsilon$. Le théorème est démontré. $\square$

On termine par un résultat dû à Lusin, qui montre qu'une fonction mesurable est continue sur un ensemble de complémentaire petit. Lorsque la mesure est intérieurement régulière, cet ensemble peut être pris compact.

***Théorème 24* (Lusin).** *Soient X un espace topologique séparé, μ une mesure finie intérieurement régulière et Y un espace métrique séparable. Soit $f : X \to Y$ une fonction mesurable (c'est-à-dire que l'image réciproque de tout borélien est μ-mesurable). Alors pour tout $A \subset X$ μ-mesurable et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un compact $K \subset A$ tel que $\mu(A \smallsetminus K) < \varepsilon$ et $f_{|K}$ est continue.*

Preuve. Fixons $n \in \mathbf{N}^*$. Soit E_i une famille dénombrable disjointe de boréliens de diamètre plus petit que $2/n$ qui recouvre Y. On peut construire les E_i par récurrence à partir d'une suite $\{y_i\}_{i\in\mathbf{N}^*}$ dense dans Y en posant : $E_i = B(y_i, 1/n) \smallsetminus \bigcap_{j<i} E_j$.

Extrait de la publication

Par régularité, pour chaque i, on peut trouver un borélien A'_i et un compact K_i tels que :

$$K_i \subset A'_i \subset A \cap f^{-1}(E_i), \quad \mu\big(A \cap f^{-1}(E_i) \smallsetminus K_i\big) < \varepsilon/2^{i+n}.$$

On a alors $\mu(A \smallsetminus \cup K_i) < \varepsilon/2^n$ si bien qu'il existe $N \in \mathbf{N}$, dépendant de n, tel que :

$$\mu\Big(A \smallsetminus \bigcup_{i=0}^{N} K_i\Big) < \varepsilon/2^n.$$

Définissons une fonction f_n sur $K'_n = \cup_0^N K_i$ en posant $f_n(x) = y_i$ pour tout $x \in K_i$. Les compacts K_i sont disjoints, la fonction f_n est donc continue. Elle vérifie de plus $d(f_n(x), f(x)) < 1/n$ sur K'_n. La suite f_n converge vers f uniformément sur $\cap_n K'_n$, ce qui montre que f est continue sur ce compact. Cela termine la preuve. □

5. Exercices

Exercice 1. Donner un exemple d'espace métrique localement compact qui n'est pas séparable.

Exercice 2. Soit X un espace métrique séparable. Montrer qu'il existe une base dénombrable d'ouverts $\mathcal{D}$ qui est invariante par union finie :

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ \forall\, U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{D}, \quad \bigcup U_i \in \mathcal{D}.$$

Indication : prendre la famille des ouverts qui sont unions finies d'ensembles appartenant à une base dénombrable d'ouverts donnée.

Exercice 3. Soit X un espace métrique séparable. Montrer qu'il existe une suite de fonctions continues $f_n : X \to \mathbf{R}$ qui sépare les points : pour tous $x, y \in X$ distincts, il existe n tel que $f_n(x) \neq f_n(y)$. En déduire que l'on peut trouver une injection continue de X dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Exercice 4. Donner une suite explicite de compacts $K_n \subset [0,1] \smallsetminus \mathbf{Q}$ telle que $\lambda(K_n)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5. Soit X un espace topologique séparé, muni d'une mesure borélienne finie. On dit que X est *presque σ-compact*, s'il existe une suite de compacts K_i telles que $\mu\big(X \smallsetminus \bigcup_{i\in\mathbf{N}} K_i\big) = 0$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

– l'espace X est presque σ-compact,
– la mesure μ est intérieurement régulière,
– tout borélien de X est presque σ-compact.

Le terme utilisé pour cette propriété dans la littérature de langue anglo-saxonne est « tight ».

Extrait de la publication