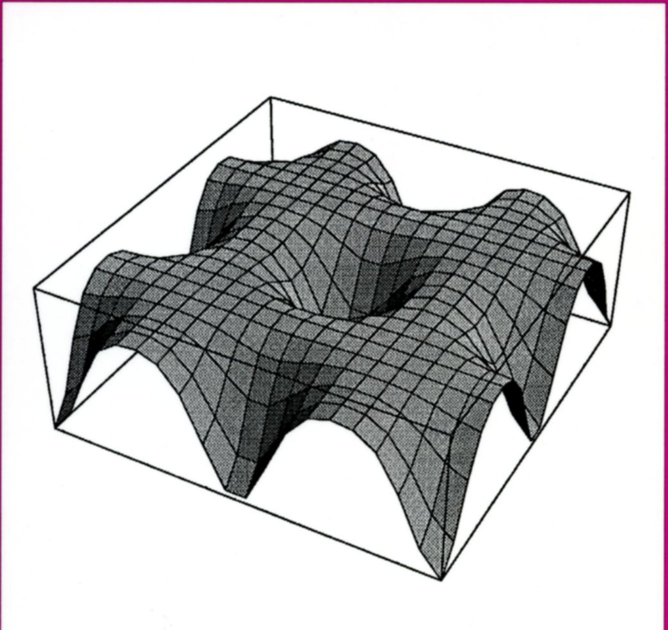
Bruno Torrésani

Analyse continue par ondelettes



SAVOIRS ACTUELS

InterÉditions / CNRS Éditions

Bruno Torrésani
Centre de Physique Théorique de Marseille (CNRS)

Analyse continue par ondelettes

Préface de Yves Meyer, membre de l'Institut

SAVOIRS ACTUELS
InterÉditions / CNRS Éditions

ISBN 2 7296 0591 6
ISBN 2 271 05364 1

SOMMAIRE

PRÉFACE

Quand Bruno Torrésani m'a prié de préfacer cet ouvrage, j'ai aussitôt laissé de côté ce que je faisais et, oubliant le temps qui passe, me suis abandonné à la lecture. Bien évidemment je savais que mon plaisir serait à la hauteur de mon admiration pour les travaux de B. Torrésani et de ses collaborateurs qui incluent notre maître Alex Grossmann. Mon attente n'a pas été déçue et ce livre est beau, car il est le reflet d'une profonde conviction scientifique que je vais tenter d'expliquer et de justifier dans les lignes qui suivent.

Les ondelettes sont d'abord apparues (1981) dans l'article fondamental d'Alex Grossmann et Jean Morlet comme des "états cohérents" au sens de la mécanique quantique. Ce point de vue est *géométrique* par opposition à une approche *algorithmique* qui prit en 1985 le devant de la scène à la suite des travaux de S. Mallat et I. Daubechies. Pour insister davantage, disons que l'approche algorithmique repose sur l'approximation de l'espace géométrique ambiant par une suite emboitée de réseaux (ou grilles) de plus en plus denses. Ces réseaux, une fois choisis, imposent une pénible rigidité géométrique et vont, par exemple, empêcher d'effectuer des translations ou des rotations arbitraires. Voilà un sérieux handicap si l'on compare la transformée en ondelettes orthogonale à la transformée de Fourier qui est compatible avec l'action du groupe euclidien. Mais par ailleurs, on ne saurait faire d'analyse numérique ou de calcul scientifique (méthodes multigrilles, etc.) sans utiliser ces grilles de plus en plus fines et l'usage de la FFT (fast Fourier transform ou transformée de Fourier rapide) impose aussi de choisir de telles grilles. Ce divorce entre la liberté de manœuvre dont on souhaite disposer dans l'analyse par ondelettes et les contraintes imposées par l'utilisation d'algorithmes efficaces, du type FFT, a été l'une des tensions les plus fécondes et créatrices de la théorie des ondelettes depuis les origines. Il est clair que l'ouvrage de B. Torrésani avive ces tensions et sera donc la source de nouveaux progrès.

Un des points forts de cet ouvrage est donc l'accent mis sur la "liberté de mouvement" fournie par les diverses actions de groupe (translations, dilatations et rotations) que l'on peut envisager dans les constructions d'ondelettes. On ne peut cependant "bouger dans tous les sens" et si l'on désire le faire, il faudra relier ces trois types de transformations géométriques dans une recherche qui s'apparente à celle de la meilleure base dans les algorithmes de Coifman et Wickerhauser. Cette étude, qui n'avait pas été prévue par les "pères fondateurs", est un des points très originaux du beau livre de B. Torrésani.

Un second point fort est la description précise et exacte du remarquable algorithme de détection de la "fréquence instantanée". Comme chacun sait, la quête de la "fréquence instantanée" est l'une des épopées majeures du traitement du signal et les techniques utilisées classiquement étaient basées sur la transformation de Wigner-Ville et ses généralisations. Une des plus belles réalisations scientifiques de "l'équipe ondelettes" de Marseille a été la découverte d'un algorithme "temps-fréquence" basé sur la transformation en ondelettes. La présentation de cet algorithme par B. Torrésani est la meilleure dont nous disposions aujourd'hui.

Une troisième nouveauté, présentée par B. Torrésani, est la construction sur la sphère d'"ondelettes de Gabor" qui soient compatibles avec l'invariance par rotation.

Un dernier chapitre traite de la possibilité d'utiliser des QMFs (quadrature mirror filters) pour effectuer des calculs approchés mais rapides sur des ondelettes non orthogonales.

L'ouvrage que nous offre B. Torrésani complète *Ten Lectures on Wavelets*, écrit par I. Daubechies, et je crois que ces deux traités feront bon ménage sur le bureau des scientifiques qui utilisent les ondelettes.

Le style de B. Torrésani est remarquablement clair et efficace et je suis heureux qu'un large public scientifique puisse enfin disposer de cet excellent cours avancé sur les ondelettes et leurs applications.

Yves Meyer, membre de l'Institut

Chapitre I

INTRODUCTION

L'analyse par ondelettes est apparue sous ses "formes modernes", au début des années 80, dans un remarquable article d'Alex Grossmann et Jean Morlet. L'un des points essentiels qu'elle nous enseigne est qu'un objet mathématique (qu'il s'agisse d'une fonction, d'un signal, d'un opérateur,...) peut être représenté de multiples façons, chacune de ces représentations permettant de mettre l'accent sur certaines caractéristiques de l'objet étudié. Un exemple significatif est fourni par le signal de parole, dont des représentations temps-fréquence différentes (par exemple une représentation en ondelettes et une représentation de Gabor à bande étroite) conduisent à des interprétations différentes.

Il est amusant de constater qu'il en va de même pour l'analyse par ondelettes elle-même : on peut la présenter de divers points de vue, qui dépendent autant de l'application visée que de la culture scientifique de l'utilisateur. En effet, quelle que soit l'approche choisie, on peut toujours y retrouver une "préhistoire" des ondelettes, au cours de laquelle des techniques très semblables aux ondelettes (et qui souvent avaient tout des ondelettes sauf le nom) étaient couramment utilisées.

On peut se livrer à un essai de classification des "préhistoires des ondelettes" et de leurs "prolongements contemporains". Cette classification est bien entendu arbitraire (les quatre classes ci-dessous ont une intersection non vide — et il n'est pas certain que leur réunion recouvre l'ensemble du sujet), mais elle permet de décrire les tendances générales.

- *Approches "temps-échelle"* : Il s'agit d'approches trouvant leur origine dans des problèmes de caractérisation d'espaces fonctionnels et d'opérateurs. Certaines propriétés de régularité des fonctions se trouvent mises en évidence lorsque l'on étudie le prolongement harmonique des fonctions en question (voir par exemple [13]), c'est-à-dire une autre représentation. L'un des outils de base dans ce domaine est l'identité de Calderón [5], dont la formule de représentation en ondelettes peut être vue comme une "paraphrase" plus géométrique. L'une des conséquences a été la construction de bases orthonormées d'ondelettes par J.O. Stromberg [31] puis Y. Meyer et ses collaborateurs (voir [23]), qui a abouti au concept d'analyse multirésolution [21], puis à diverses généralisations (bases d'ondelettes sur un intervalle ou périodiques, ondelettes multidimensionnelles associées à des "dilatations généralisées", bases trigonométriques locales,...).

- *Approches "algorithmiques"* : On peut regrouper dans cette catégorie les travaux qui font suite aux travaux de Marr [22] (bien que celui-ci ne se soit que très peu intéressé aux aspects purement algorithmiques) et ses collaborateurs (ou même certains précurseurs, puisqu'il semble que certains physiologistes de la vision aient eu, à la fin du siècle dernier, de semblables préoccupations) sur la vision par ordinateur et le traitement d'images. L'accent est mis ici sur les aspects algorithmiques. Cela fait apparaître la richesse algorithmique des ondelettes, basées sur des opérations de dilatation et translation très naturelles, y compris dans le cas de signaux définis sur un réseau (ce qui est le cas en pratique). Les "références historiques" sont les articles fameux de Burt et Adelson sur le "Laplacien Pyramidal" [4], ainsi que les travaux d'Esteban et Galand [11], puis de Smith et Barnwell [30] qui ont conduit à la construction des filtres miroir en quadrature (QMF) et rejoignent la théorie des analyses multirésolution, puis plus récemment aux algorithmes adaptatifs de décomposition en paquets d'ondelettes de l'équipe de Yale (voir par exemple [33]). Une avancée plus récente concerne l'utilisation systématique des bases d'ondelettes en analyse numérique [3], basée sur le fait qu'une large classe d'opérateurs peuvent être représentés de façon économique (*i.e.* par des matrices creuses) dans des bases d'ondelettes.

- *Approches "temps-fréquence"* : On se place ici délibérément dans le contexte du traitement du signal. Suite aux travaux fondamentaux de J. Ville [32] sur les représentations temps-fréquence des signaux, le sujet est presque devenu une discipline scientifique à part entière. De nombreux auteurs se sont particulièrement intéressés au problème de définition et d'estimation de la fréquence instantanée dans les signaux (voir à ce sujet le livre de P. Flandrin [12]). Les ondelettes apparaissent dans ce contexte comme une représentation temps-fréquence parmi beaucoup d'autres, qui a cependant pour elle une grande souplesse d'utilisation. Le problème se pose maintenant des représentations temps-fréquence adaptatives : étant donnée une famille de représentations temps-fréquence, comment choisir celle qui décrira optimalement un signal donné ? Il s'agit de l'un des défis les plus stimulants à l'heure actuelle.

- *Approches "géométriques"* : Bien que ces approches soient assez similaires aux précédentes, l'origine et le langage sont ici ceux de la mécanique quantique et de la théorie des groupes (voir par exemple l'article de base [16], ou encore [27], dans lequel le lien avec les états cohérents de la mécanique quantique est explicité). L'accent est mis sur les propriétés de symétrie des représentations en ondelettes, ce qui permet de donner une description unifiée d'une famille de représentations temps-fréquence incluant, outre les ondelettes dans diverses versions, les représentations de Fourier à fenêtre (voir par exemple [29]) ainsi que de nombreuses généralisations. En revanche, on ne sait toujours pas comment insérer dans ce cadre les analyses multirésolution (à l'exception de quelques cas trop spécifiques), qui restent l'une des pierres angulaires de "l'édifice ondelettes".

Des descriptions axées sur divers points de vue (la plupart du temps il s'agit des deux premiers) peuvent être trouvées par exemple dans [6], [10], [12], [17], [23], [29] et [33]. En revanche, il n'existe à ce jour que très peu de textes de réference sur les décompositions continues en ondelettes.

Le présent ouvrage ne prétend pas rendre compte de l'aspect "multiforme" des ondelettes que nous venons d'évoquer (nous renvoyons à [24] pour une description globale de certains aspects ou aux compilations d'articles de revue [2], [7], [19], [20], [28]). Il est plus spécifiquement consacré aux décompositions continues en ondelettes ainsi qu'à certaines de leurs applications en traitement du signal. On insistera donc principalement sur les approches "temps-fréquence" et "géométrique", ainsi que sur les méthodes et algorithmes basés sur ces aspects.

Les trois premiers chapitres sont consacrés à des généralités concernant les représentations temps-fréquence et temps-échelle et, en particulier, sur les transformations continues en ondelettes et de Gabor. Après cette introduction, le chapitre II décrit un certain nombre de représentations de type temps-fréquence ou temps-échelle, ainsi que certaines de leurs propriétés caractéristiques, notamment la souplesse des représentations continues, qui les rend adaptables à de nombreuses situations spécifiques. Le chapitre III est, quant à lui, consacré à un certain nombre d'exemples académiques commentés et destinés à familiariser le lecteur avec les images de transformée en ondelettes.

Les chapitres IV et V illustrent les deux aspects complémentaires des représentations en ondelettes, à savoir les aspects temps-échelle et temps-fréquence. Au chapitre IV on utilise les ondelettes pour effectuer une analyse locale des fonctions et des signaux, ce qui est illustré par les problèmes de caractérisation de singularités ponctuelles des fonctions et mis en parallèle avec les problèmes de détection de contours dans les images, et de caractérisation d'auto-similarité dans les signaux, suivant entre autres les travaux du groupe de Bordeaux (voir par exemple [1]). Le chapitre V est consacré aux problèmes de caractérisation de signaux par des amplitudes et fréquences locales, donc à des aspects temps-fréquence. On y décrit les méthodes, mises au point par le groupe de Marseille, pour la mesure de fréquences locales dans les signaux et les images au moyen des transformations continues en ondelettes ou de Gabor.

Les trois derniers chapitres sont consacrés à des points précis de l'analyse continue par ondelettes. Le chapitre VI traite la stabilité des représentations continues par rapport à la discrétisation, suivant la voie tracée par I. Daubechies [9]. Le chapitre VII consiste en une "relecture" des décompositions décrites au chapitre II selon un point de vue plus géométrique ; on y justifie en particulier le terme "temps-fréquence" sous un angle géométrique et algébrique, en montrant comment les représentations temps-fréquence sont naturellement associées à un "espace des phases" construit par la théorie des groupes. Enfin, le chapitre VIII est consacré aux algorithmes de calcul adaptés aux différentes versions de la transformation en ondelettes envisagées dans ce livre. On y montre notamment comment les algorithmes rapides de transformée en ondelettes discrètes sont obtenus naturellement à partir des algorithmes pyramidaux du traitement d'image et comment ils peuvent être adaptés à la situation plus générale de la transformation (presque) continue en ondelettes. Ces trois chapitres peuvent être lus indépendamment les uns des autres.

Quelques aspects plus spécifiques encore (comme par exemple quelques calculs géométriques sur les groupes de rotations ou le groupe euclidien ou des coefficients de filtres pour algorithmes pyramidaux) ne sont abordés que sous forme de compléments, situés en fin de chapitre, pour ne pas alourdir le corps du texte.

Pour compléter le texte, des annexes résumant quelques bases mathématiques nécessaires ont été placés à la fin de l'ouvrage.

Les analyses multirésolution et les bases d'ondelettes n'apparaissent explicitement à aucun moment dans le texte, du moins sous leur forme classique. Il s'agit là d'un choix délibéré, dans la mesure où il existe déjà d'excellents ouvrages faisant autorité sur le sujet (entre autres [6], [10] et [23]). En revanche, la notion d'analyse multirésolution apparaît en filigrane à de nombreuses reprises, comme par exemple au chapitre VIII (consacré aux algorithmes de calcul de transformée en ondelettes), où elle est naturellement associée aux algorithmes pyramidaux, ou à la fin du second chapitre dans lequel est ébauché le passage des ondelettes continues aux ondelettes discrètes.

Le lecteur désireux d'expérimenter les techniques décrites dans ce livre peut utiliser un certain nombre de logiciels du domaine public, déposés sur quelques sites du réseau *Internet* (il existe aussi quelques logiciels commerciaux). Nous donnons ici une liste (qui est loin d'être exhaustive) de tels sites :

- *cs.nyu.edu* : Dans le répertoire */pub/wave/software* se trouve une version de logiciels développés par le département "computer science" du Courant Institute de New York. On y trouve en particulier des outils de transformation en ondelettes unidimensionnelle (fichier *wave1.tar.Z*) et bidimensionnelle (fichier *wave2.tar.Z*), ainsi que de décomposition temps-fréquence adaptative (fichier *mpp.tar.Z*) ou d'autres outils reliés. Dans tous les cas, ce sont des logiciels développés en langage C.

- *pascal.math.yale.edu* : Le répertoire */pub/software* contient des logiciels développés par le département de Mathématiques de Yale University, et fondés sur les décompositions temps-fréquence et temps-échelle adaptatives, les bases de paquets d'ondelettes et les bases trigonométriques locales, ainsi que des outils de débruitage de signaux basés sur ces méthodes.

- *maxwell.math.scarolina.edu* : Le répertoire */pub/wavelets/programs* contient un certain nombre d'outils liés aux décompositions en ondelettes (développés en langage C).

- *stats.stanford.edu* : Le répertoire */pub/wavelab* contient des outils (utilisant l'environnement *MATLAB*) de débruitage de signaux par transformation en ondelettes.

- *cpt.univ-mrs.fr* : Un logiciel (basé sur l'environnement *Splus*), mettant en œuvre les techniques décrites au chapitre V de ce volume, ainsi que des algorithmes reliés, sera prochainement disponible sur ce site.

Dans tous les cas, ces logiciels sont disponibles par la procédure UNIX "ftp" usuelle : composer *ftp site* ; à la question *user*, répondre *anonymous*, et à la question *password*, donner sa propre adresse Internet. Utiliser ensuite *cd rep* pour se positionner dans le répertoire voulu ("rep" en l'occurrence), puis *get nomfichier* pour transférer le fichier voulu (dont le nom est ici "nomfichier").

Cet ouvrage se fonde sur des cours que j'ai donnés au DEA "Physique des Particules, Physique Mathématique et Modélisation" des universités d'Aix-Marseille I et II, de Nice, Toulon-Var et Toulouse entre 1991 et 1994, ainsi qu'à l'école d'été "Ondelettes et Applications" organisée par l'ENSICA, Toulouse (été 1992). Avant et durant sa rédaction, j'ai bénéficié d'innombrables discussions avec, en particulier, A. Grossmann, Ph. Tchamitchian, M.A. Muschietti, G. Beylkin, R. Carmona, B. Escudié, K. Flornes, P. Ponenti, V. Wickerhauser, M. Holschneider et F. Plantevin, que je tiens à remercier ici. Je suis aussi particulièrement reconnaissant envers Y. Meyer pour ses conseils, ses encouragements toujours chaleureux et ses critiques constructives, mais aussi pour avoir relu en détail et corrigé une version préliminaire de ce texte et accepté d'en écrire la préface. Je tiens à adresser mes remerciements à C. Fabre, directeur de la collection, pour ses nombreuses remarques.

Je tiens enfin à remercier S. Zhong, qui a aimablement produit les figures IV.1-IV.3 du chapitre IV, ainsi que M. Kunt, éditeur de la revue *Signal Processing* pour l'autorisation de reproduire les figures 8, 9 et 10 du chapitre V (extraites de l'article de C. Gonnet et B. Torresani, "Local frequency analysis with two-dimensional wavelet transform", *Signal Processing*, **37** (1994) 389-404).

RÉFÉRENCES

[1] E. Bacry, A. Arneodo, J.F. Muzy, "Singularity Spectrum of Fractal Signals from Wavelet Analysis : Exact Results", *J. Stat. Phys.*, **70**, (1993) p. 635.

[2] J. Benedetto, M. Frazier Ed., *Wavelets : Mathematics and Applications*, CRC Press (1993).

[3] G. Beylkin, R. R. Coifman, V. Rokhlin, "Fast Wavelet Transforms and Numerical Algorithms I", *Comm. Pure and Appl. Math.*, **44** (1991) p. 141-183.

[4] P. Burt, E. Adelson, "The Laplacian Pyramid as a Compact Image Coder", *IEEE Trans. on Comm.*, **31** (1983) p. 482-540.

[5] A. Calderón, "Intermediate Spaces and Interpolation, the Complex Method", *Studia Math.*, **24** (1964) 113.

[6] C. Chui, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, New York (1992).

[7] C. Chui Ed., *Wavelets : a Tutorial in Theory and Applications*, Academic Press, New York (1992).

[8] J.M. Combes, A. Grossmann, Ph. Tchamitchian Eds., "Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space", *IPTI*, Springer (1987).

[9] I. Daubechies,"The Wavelet Transform, Time-Frequency Localisation and Signal Analysis, *IEEE Trans. Inf. Th.* **36** (1990) p. 961-1005.

[10] I. Daubechies,"Ten Lectures on Wavelets", *SIAM-CBMS* (1992).

[11] D. Esteban, G. Galand, "Application of Quadrature Mirror Filters to Split Band Voice Coding Schemes", *Proc. Int. Conf. ASSP* (1977) p. 191-195.

[12] P. Flandrin, *Temps-Fréquence*, Hermès (1993).

[13] M. Frazier, B. Jawerth, G. Weiss, "Littlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces", *CBMS-AMS regional conferences series, SIAM*

[14] D. Gabor, "Theory of Communication", *J. Inst. Elec. Eng.* **903** (1946), p. 429.

[15] A. Grossmann, J. Morlet, "Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape", *SIAM J. Math. An.* **15**, (1984) p. 723.

[16] A. Grossmann, J. Morlet, T. Paul, "Transforms Associated with Square Integrable Group Representations I", *J. Math. Phys.*, **27** (1985) p. 2473 ; "Transforms Associated with Square Integrable Group Representations II", *Ann. Inst. H. Poincaré*, **45** (1986) p. 293.

[17] M. Holschneider, *Wavelets : an Analysis Tool*, Oxford University Press (1994).

[18] J.R. Klauder, B.S. Skagerstam, *Coherent States*, World Scientific (1985).

[19] T. Koornwinder Ed., *Wavelets, an Elementary Treatment of Theory and Applications*, Series in Approximations and Decompositions 1, World Scientific (1993).

[20] P. G. Lemarié Ed., "Les Ondelettes en 1989", *Lect. Notes in Math.*, **1438** (1990).

[21] S. Mallat, "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition : The Wavelet Representation", *IEEE Trans. Pattern Anal. and Mach. Intell.*, **11**, n. 7 (1989) p. 674-693.

[22] D. Marr, *Vision*, Freeman, New York (1982).

[23] Y. Meyer, *Ondelettes et Opérateurs* (en trois volumes), Hermann (1989-1991).

[24] Y. Meyer, *Les Ondelettes, Algorithmes et Applications*, Armand Colin, 2e édition (1994).

[25] Y. Meyer Ed., "Ondelettes et applications", *Actes de la conférence de Marseille*, Masson (1989).

[26] Y. Meyer, S. Roques Ed., "Wavelets and their Applications", *Actes de la conférence de Toulouse*, Editions Frontières (1992).

[27] T. Paul, "Ondelettes et Mécanique Quantique", Thèse d'Etat, CPT Marseille (1985).

[28] M.B. Ruskai et *al.* Ed., *Wavelets and their Applications*, Jones and Bartlett Publ. Comp., Boston (1992).

[29] W. Schempp, "Harmonic Analysis on the Heisenberg Nilpotent Lie Group", *Pitman Research notes in Mathematical series*, **147** (1986).

[30] M.J. Smith, D.P. Barnwell, "Exact Reconstruction for Tree-Structured Subband Coders", *IEEE Trans. ASSP*, **34** (1986) p. 434-441.

[31] J.O. Stromberg, "A Modified Franklin System and Higher-Order Spline Systems on $\mathbb{R}^n$ as Unconditional Bases for Hardy Spaces", *Conference in Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund*, Wadworth math. series (1983) p. 475-493.

[32] J. Ville, "Théorie et Applications de la Notion de Signal Analytique", *Câbles et Transmissions 2e A* (1) (1948) p. 61-74.

[33] M.V. Wickerhauser, *Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software*, A.K. Peters Publ. Comp. (1994).