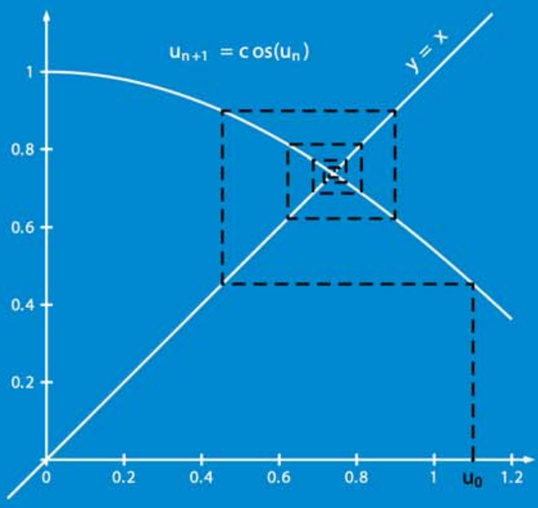
COLLECTION ENSEIGNEMENT SUP //// Mathématiques

L3M1

Problèmes d'analyse I

NOMBRES RÉELS, SUITES ET SÉRIES

EXERCICES CORRIGÉS



Wieslawa J. Kaczor et Maria T. Nowak

Traduction : Eric Kouris

EDP SCIENCES

PROBLÈMES D'ANALYSE I
Nombres réels, suites et séries

Wieslawa J. Kaczor, Maria T. Nowak
Traduction : Eric Kouris

Collection dirigée par Daniel Guin

EDP SCIENCES

17, avenue du Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

This work was originally published in Polish, as *Zadania z Analizy Matematycznej. Część Pierwsza. Liczby Rzeczywiste, Ciźgi i Szeregi Liczbowe*, © 1996 Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin. Published in English by the American Mathematical Society under the title "*Problems in Mathematical Analysis I: Real Numbers, Sequences and Series*", © 2000 American Mathematical Society. The present translation was created for EDP Sciences under authority of the American Mathematical Society and is published by permission.

Imprimé en France

ISBN : 978-2-7598-0058-2

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE DU TRADUCTEUR

Ce livre est le premier d'une série de trois recueils d'exercices corrigés traitant des bases de l'analyse réelle. Il s'adresse d'abord aux étudiants, principalement ceux des niveaux L1 et L2, qu'ils soient à l'université ou en CPGE. Il intéressera aussi les candidats aux concours du CAPES et de l'agrégation de mathématiques qui y trouveront autant les théorèmes qu'ils doivent connaître que des exercices pour les illustrer.

Ce premier volume traite des propriétés élémentaires des nombres réels, des inégalités élémentaires, des suites et des séries numériques. Chaque section, centrée sur un thème, commence par des exercices relativement simples et se poursuit par des problèmes plus difficiles, certains étant des théorèmes classiques. Souvent, différents aspects d'un même thème sont traités en une série d'exercices successifs pour permettre d'en approfondir la compréhension.

Tous les exercices sont corrigés, le plus souvent en détail, ce qui permettra aux étudiants de ne pas « sécher » sur un exercice difficile. Nous les invitons cependant à chercher par eux-mêmes les exercices avant de regarder les solutions pour ne pas se priver du plaisir de les résoudre. Nous insistons aussi sur le fait que les auteurs ne donnent pas nécessairement toutes les étapes d'un calcul lorsqu'ils considèrent que celui-ci ne pose pas de problèmes techniques. C'est bien sur aux étudiants de prendre le temps de rédiger entièrement leurs solutions.

Nous avons ajouté dans cette traduction quelques notes pour préciser certaines définitions et éviter ainsi d'avoir à chercher dans d'autres ouvrages. Nous avons aussi ajouter en note les noms de certaines propriétés et relations pour inviter les étudiants à engager des recherches par eux-mêmes. L'index à la fin de l'ouvrage permet de facilement retrouver une définition et la table des renvois permet de voir les liens entre les différents problèmes dans ce volume et dans les deux autres.

Je tiens à remercier Daniel Guin et Xavier Cottrell pour avoir pris le temps de relire cette traduction et pour les remarques qu'ils m'ont faites afin d'améliorer le style et de corriger les erreurs. Je reste responsable de celles qui subsisteraient (le moins possible j'espère). Je souhaite aussi remercier pour sa disponibilité Patrick Fradin, l'auteur du logiciel TeXgraph avec lequel l'illustration de couverture a été réalisée.

É. Kouris

PRÉFACE À L'ÉDITION ANGLAISE

Ce livre est l'édition anglaise, revue et augmentée, d'une version polonaise publiée en 1996 par la maison d'édition de l'université Maria Curie-Skłodowska de Lublin, en Pologne. Il s'agit du premier volume d'une série de recueils d'exercices d'analyse. Celle-ci s'adresse principalement aux étudiants de premier cycle universitaire. Le choix et l'arrangement des thèmes et exercices étudiés permettent aux étudiants de travailler par eux-mêmes, mais les enseignants pourront le trouver utile pour organiser des travaux dirigés.

Ce volume couvre trois sujets : les nombres réels, les suites et les séries numériques. Il ne comporte pas de problèmes concernant les espaces métriques et topologiques qui seront présentés dans le second volume.

Chaque chapitre se divise en deux parties : énoncés de problèmes et solutions. Nous donnons une solution complète dans la plupart des cas. Lorsqu'aucune difficulté ne devrait se présenter ou lorsqu'un problème semblable a déjà été résolu, seul une indication ou la réponse est donnée. Très souvent, un problème admet plusieurs solutions ; nous n'en donnons qu'une en espérant que les étudiants en trouveront d'autres par eux-mêmes.

En gardant à l'esprit que cet ouvrage est destiné prioritairement aux étudiants, nous avons essayé de conserver l'exposé à un niveau élémentaire à chaque fois que c'était possible. Par exemple, nous présentons une démonstration élémentaire du théorème de Toeplitz sur les transformations régulières de suites qui, dans beaucoup d'ouvrages, est démontré par des méthodes d'analyse fonctionnelle. La preuve présentée ici est tirée de la publication originale de Toeplitz, parue en 1911 dans *Prace Matematyczno-Fizyczne*, Vol. 22. Nous espérons que notre présentation de cette partie de l'analyse réelle sera plus accessible aux lecteurs et permettra une meilleure compréhension.

Toutes les notations et définitions utilisées dans ce volume sont standards et d'un usage courant. Le lecteur peut les trouver, par exemple, dans les ouvrages [12] et [23], qui comportent tous les éléments théoriques nécessaires. Néanmoins, pour éviter toute ambiguïté et dans un souci de cohérence, une liste de notations et de définitions est incluse dans ce livre.

Nous avons emprunté librement dans plusieurs ouvrages, recueils de problèmes et sections de problèmes de journaux tels que *American Mathematical Monthly*, *Mathematics Today* (en russe) et *Delta* (en polonais). La liste complète des livres est donnée en bibliographie. Donner toutes les sources originales dépassait nos objectifs et nous avons pu oublier certaines contributions. Nous présentons nos excuses si cela s'est produit.

Nous avons une grande dette envers nos amis et collègues du département de mathématiques de l'université Maria Curie-Skłodowska qui nous ont fait des critiques constructives. Nous avons eu de nombreuses conversations stimulantes avec M. Koter-Mórgowska, T. Kuczumow, W. Rzymowski, S. Stachura et W. Zygmunt. Nous remercions aussi sincèrement le professeur Jan Krzyż pour son aide dans la préparation de la première version du manuscrit anglais. Nous sommes ravis d'exprimer notre gratitude au professeur Kazimierz Goebel pour ses encouragements et son intérêt actif dans ce projet. Nous sommes aussi heureux de remercier le professeur Richard J. Libera de l'université du Delaware pour son aide précieuse et généreuse dans la traduction anglaise et pour toutes ses suggestions et corrections qui ont grandement amélioré la version finale de ce livre.

W. J. Kaczor, M. T. Nowak

NOTATIONS ET TERMINOLOGIE

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des nombres réels positifs.
- $\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble des nombres réels strictement positifs.
- $\overline{\mathbb{R}}$ est la droite réelle achevée, autrement dit, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs.
- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- $[a, b]$ est l'intervalle fermé d'extrémités a et b.
- $]a, b[$ est l'intervalle ouvert d'extrémités a et b.
- $[x]$ est la partie entière du nombre réel x (on a conservé la notation anglophone).
- Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{pour } x > 0, \\ -1 & \text{pour } x < 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$, on pose aussi $0! = 1$,

  $(2n)!! = 2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n-2) \times 2n$,

  $(2n-1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-3) \times (2n-1)$.

- Si $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ est non vide et majoré, $\sup \mathbf{A}$ est alors le plus petit majorant de $\mathbf{A}$. Si l'ensemble non vide $\mathbf{A}$ n'est pas majoré, on pose alors $\sup \mathbf{A} = +\infty$.

- Si $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ est non vide et minoré, $\inf \mathbf{A}$ est alors le plus grand minorant de $\mathbf{A}$. Si l'ensemble non vide $\mathbf{A}$ n'est pas minoré, on pose alors $\inf \mathbf{A} = -\infty$.

- Une suite $\{a_n\}$ est dite croissante (resp. décroissante) si $a_{n+1} \geqslant a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (resp. $a_{n+1} \leqslant a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). La classe des suites monotones est formée des suites croissantes et des suites décroissantes.

- Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites réelles ($b_n \neq 0$ pour tout n). Si le quotient a_n/b_n tend vers 0 (resp. reste borné) lorsque n tend vers $+\infty$, on écrit alors $a_n = o(b_n)$ (resp. $a_n = O(b_n)$).

- Un réel c est une valeur d'adhérence de la suite $\{a_n\}$ s'il existe une sous-suite $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$ qui converge vers c.

- Soit $\mathbf{S}$ l'ensemble de toutes les valeurs d'adhérence de $\{a_n\}$. La limite inférieure, $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n$, et la limite supérieure, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n$, sont définies comme suit :
$$\varlimsup_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ n'est pas majorée,} \\ -\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ est majorée et } \mathbf{S} = \emptyset, \\ \sup \mathbf{S} & \text{si } \{a_n\} \text{ est majorée et } \mathbf{S} \neq \emptyset, \end{cases}$$
$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} -\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ n'est pas minorée,} \\ +\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ est minorée et } \mathbf{S} = \emptyset, \\ \inf \mathbf{S} & \text{si } \{a_n\} \text{ est minorée et } \mathbf{S} \neq \emptyset. \end{cases}$$

- Un produit infini $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ est dit convergent s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$ pour $n \geqslant n_0$ et la suite $\{a_{n_0} a_{n_0+1} \ldots a_{n_0+n}\}$ converge, lorsque n tend vers $+\infty$, vers une limite P_0 non nulle. Le nombre $P = a_1 a_2 \ldots a_{n_0-1} \cdot P_0$ est appelé la valeur du produit infini.

I

NOMBRES RÉELS

Énoncés

I.1. Borne supérieure et borne inférieure d'ensembles de nombres réels, fractions continues

I.1.1. Montrer que

$$\sup\left\{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 2\right\} = \sqrt{2}.$$

I.1.2. Soit $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide. On pose $-\mathbf{A} = \{x : -x \in \mathbf{A}\}$. Montrer que

$$\sup(-\mathbf{A}) = -\inf \mathbf{A},$$
$$\inf(-\mathbf{A}) = -\sup \mathbf{A}.$$

I.1.3. Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbb{R}$ deux ensembles non vides. On pose

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \{z = x + y : x \in \mathbf{A}, y \in \mathbf{B}\},$$
$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \{z = x - y : x \in \mathbf{A}, y \in \mathbf{B}\}.$$

Prouver que

$$\sup(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \sup \mathbf{A} + \sup \mathbf{B},$$
$$\sup(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \sup \mathbf{A} - \inf \mathbf{B}.$$

Établir des formules semblables pour $\inf(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ et $\inf(\mathbf{A} - \mathbf{B})$.

I.1.4. Étant donné $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux ensembles de réels strictement positifs, on définit

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \{z = x \times y : x \in \mathbf{A}, y \in \mathbf{B}\},$$
$$\frac{1}{\mathbf{A}} = \left\{z = \frac{1}{x} : x \in \mathbf{A}\right\}.$$

Montrer que

$$\sup(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \sup \mathbf{A} \times \sup \mathbf{B}.$$

Montrer aussi que si $\inf \mathbf{A} > 0$, alors

$$\sup\left(\frac{1}{\mathbf{A}}\right) = \frac{1}{\inf \mathbf{A}}$$

et si $\inf \mathbf{A} = 0$, alors $\sup\left(\frac{1}{\mathbf{A}}\right) = +\infty$. De plus, si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des ensembles bornés de réels, alors

$$\sup(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \max\{\sup \mathbf{A} \times \sup \mathbf{B}, \sup \mathbf{A} \times \inf \mathbf{B}, \inf \mathbf{A} \times \sup \mathbf{B}, \inf \mathbf{A} \times \inf \mathbf{B}\}.$$

I.1.5. Soit $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ des ensembles non vides de réels. Montrer que

$$\sup(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \max\{\sup \mathbf{A}, \sup \mathbf{B}\}$$

et

$$\inf(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \min\{\inf \mathbf{A}, \inf \mathbf{B}\}.$$

I.1.6. Trouver la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ définis par

$$\mathbf{A}_1 = \left\{2(-1)^{n+1} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(2 + \frac{3}{n}\right) : n \in \mathbb{N}^*\right\},$$
$$\mathbf{A}_2 = \left\{\frac{n-1}{n+1} \cos\frac{2n\pi}{3} : n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

I.1.7. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ où $\mathbf{A} = \{0{,}2\,; 0{,}22\,; 0{,}222\,; \ldots\}$ et $\mathbf{B}$ est l'ensemble des fractions décimales comprises entre 0 et 1 dont les seuls chiffres sont des 0 et des 1.

I.1.8. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble des nombres de la forme $\frac{(n+1)^2}{2^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

I.1.9. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble des nombres de la forme $\frac{(n+m)^2}{2^{nm}}$, où $n, m \in \mathbb{N}^*$.

I.1.10. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles suivants :

(a) $\mathbf{A} = \left\{\dfrac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}^*, m < 2n\right\}$,

(b) $\mathbf{B} = \{\sqrt{n} - [\sqrt{n}\,] : n \in \mathbb{N}^*\}$.

I.1.11. Trouver

(a) $\sup\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 > 0\right\}$,

(b) $\inf\left\{z = x + x^{-1} : x > 0\right\}$,

(c) $\inf\left\{z = 2^x + 2^{\frac{1}{x}} : x > 0\right\}$.

I.1.12. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles suivants :

(a) $\mathbf{A} = \left\{\dfrac{m}{n} + \dfrac{4n}{m} : m, n \in \mathbb{N}^*\right\}$,

(b) $\mathbf{B} = \left\{\dfrac{mn}{4m^2 + n^2} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$,

(c) $\mathbf{C} = \left\{\dfrac{m}{m+n} : m, n \in \mathbb{N}^*\right\}$,

(d) $\mathbf{D} = \left\{\dfrac{m}{|m| + n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$,

(e) $\mathbf{E} = \left\{\dfrac{mn}{1 + m + n} : m, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

I.1.13. Soit $n \geqslant 3$ un entier. On considère toutes les suites finies possibles $(a_1, \ldots, a_n)$ de réels strictement positifs. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble des nombres de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}},$$

où l'on pose $a_{n+1} = a_1$ et $a_{n+2} = a_2$.

I.1.14. Démontrer que, pour tout nombre irrationnel α et pour tout entier strictement positif n, il existe un entier strictement positif q_n et un entier p_n tels que

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{nq_n}\,.$$

Montrer aussi que l'on peut choisir $\{p_n\}$ et $\{q_n\}$ de telle sorte que l'on ait

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}\,.$$

I.1.15. Soit α un nombre irrationnel. Prouver que $\mathbf{A} = \{m + n\alpha : m, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$, autrement dit, que tout intervalle ouvert non-vide contient un élément de $\mathbf{A}$.

I.1.16. Montrer que $\{\cos n : n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $[-1\,,1]$.

I.1.17. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On définit la suite $\{x_n\}$ en posant

$$x = [x] + \frac{1}{x_1}\,, \quad x_1 = [x_1] + \frac{1}{x_2}\,, \ldots, x_{n-1} = [x_{n-1}] + \frac{1}{x_n}\,.$$

On a alors

$$x = [x] + \cfrac{1}{[x_1] + \cfrac{1}{[x_2] + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{[x_{n-1}] + \cfrac{1}{x_n}}}}}\,.$$

Prouver que x est rationnel si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que x_n soit un entier.

Remarque. La représentation de x ci-dessus s'appelle une *fraction continue finie*. On écrira aussi l'expression

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

de façon plus pratique sous la forme

$$a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots + \frac{1|}{|a_n}.$$

I.1.18. Pour des réels strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on pose

$$\begin{aligned}
p_0 &= a_0, & q_0 &= 1,\\
p_1 &= a_0 a_1 + 1, & q_1 &= a_1,\\
p_k &= p_{k-1}a_k + p_{k-2}, & q_k &= q_{k-1}a_k + q_{k-2}, \quad \text{avec} \quad k = 2, 3, \ldots, n
\end{aligned}$$

et on définit

$$R_0 = a_0, \quad R_k = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots + \frac{1|}{|a_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

La fraction R_k est appelée la k-ième *réduite* de $a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots + \frac{1|}{|a_n}$. Montrer que

$$R_k = \frac{p_k}{q_k} \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

I.1.19. Montrer que si p_k et q_k sont définis comme dans le problème précédent et si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des entiers, alors

$$p_{k-1}q_k - q_{k-1}p_k = (-1)^k \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Utiliser cette égalité pour conclure que p_k et q_k sont premiers entre eux.

I.1.20. Pour un nombre irrationnel x, on définit la suite $\{x_n\}$ par

$$x_1 = \frac{1}{x - [x]}, x_2 = \frac{1}{x_1 - [x_1]}, \ldots, x_n = \frac{1}{x_{n-1} - [x_{n-1}]}, \ldots$$

On pose de plus $a_0 = [x]$, $a_n = [x_n]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et

$$R_n = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots + \frac{1|}{|a_n}.$$

Prouver que la différence entre le nombre x et sa n-ième réduite est donnée par

$$x - R_n = \frac{(-1)^n}{(q_n x_{n+1} + q_{n-1})\, q_n},$$

où p_n, q_n sont définis en **I.1.18**. En déduire que x se trouve toujours entre deux réduites successives.

I.1.21. Prouver que l'ensemble $\{\sin n : n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $[-1\,,1]$.

I.1.22. Appliquer le résultat de **I.1.20** pour prouver que, pour tout nombre irrationnel x, il existe une suite $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ de nombres rationnels, q_n étant impair, telle que

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}\,.$$

(Comparer avec **I.1.14**.)

I.1.23. Démontrer la formule suivante donnant la différence entre deux réduites successives :

$$R_{n+1} - R_n = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}\,.$$

I.1.24. Soit x un nombre irrationnel. Prouver que ses réduites R_n définies en **I.1.20** sont de plus en plus proches de x, autrement dit,

$$|x - R_{n+1}| < |x - R_n|\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

I.1.25. Prouver que la réduite $R_n = p_n/q_n$ est la meilleure approximation de x par une fraction de dénominateur q_n ou moins. Autrement dit : si r/s est un rationnel de dénominateur strictement positif tel que $|x - r/s| < |x - R_n|$, alors $s > q_n$.

I.1.26. Développer chacun des nombres suivants en une fraction continue infinie : $\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

I.1.27. Pour un entier k strictement positif, déterminer le développement de $\sqrt{k^2+k}$ en fraction continue infinie.

I.1.28. Trouver tous les $x \in \,]0\,,1[$ pour lesquels a_1 dans le développement en fractions continues (voir le **problème I.1.20**) est égal à un entier n strictement positif donné.

I.2. Quelques inégalités élémentaires

I.2.1. Prouver que si les $a_k > -1$ $(k = 1, \ldots, n)$ sont de même signe, on a alors

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Remarque. On note que si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, on obtient alors l'*inégalité* bien connue *de Bernoulli* : $(1+a)^n \geqslant 1 + na$, $a > -1$.

I.2.2. Prouver le résultat suivant par récurrence : si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des réels strictement positifs tels que $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, alors $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$.

I.2.3. On note respectivement A_n, G_n et H_n les *moyennes arithmétique, géométrique* et *harmonique* des n nombres réels strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, soit

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \\ G_n &= \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n}, \\ H_n &= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}. \end{aligned}$$

Démontrer que $A_n \geqslant G_n \geqslant H_n$.

I.2.4. Établir, en utilisant le résultat du problème précédent ($A_n \geqslant G_n$), l'inégalité de Bernoulli

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx \quad \text{pour} \quad x > 0.$$

I.2.5. Vérifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les propositions suivantes :

(a) $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{2}{3}$,

(b) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \ldots + \dfrac{1}{3n+1} > 1$,

(c) $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{3n+1} + \dfrac{1}{3n+2} + \ldots + \dfrac{1}{5n} + \dfrac{1}{5n+1} < \dfrac{2}{3}$,

(d) $n\left(\sqrt[n]{n+1} - 1\right) < 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} < n\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt[n]{n+1}} + \dfrac{1}{n+1}\right)$, $n > 1$.

I.2.6. Montrer que, pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{x^n}{1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2n}} \leqslant \frac{1}{2n+1}.$$

I.2.7. Soit $\{a_n\}$ une suite arithmétique à termes strictement positifs. Prouver que

$$\sqrt{a_1 a_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

I.2.8. Montrer que

$$\sqrt{n} \leqslant \sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

I.2.9. Soit a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ des réels strictement positifs tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leqslant 1$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geqslant n^2.$$

I.2.10. Soit $a_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ et $n > 1$, on pose $s = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Vérifier les propositions suivantes :

(a) $$n\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s - a_k}\right)^{-1} \leqslant n - 1 \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{s - a_k}{a_k},$$

(b) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{s}{s - a_k} \geqslant \frac{n^2}{n-1},$$

(c) $$n\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s + a_k}\right)^{-1} \geqslant n + 1.$$

I.2.11. Prouver que si $a_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ et $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, alors

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

I.2.12. Démontrer l'*inégalité de Cauchy* suivante :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

I.2.13. Montrer que

$$\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

I.2.14. Prouver que si $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2 = 1$, alors

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant 1.$$

I.2.15. Pour $a_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, vérifier les propositions suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geqslant n^2,$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1-a_k}{a_k} \geqslant n \sum_{k=1}^{n} (1-a_k),$

(c) $\displaystyle(\log_a a_1)^2 + (\log_a a_2)^2 + \ldots + (\log_a a_n)^2 \geqslant \frac{1}{n}$ si $a_1 a_2 \ldots a_n = a \neq 1$.

I.2.16. Pour $\alpha > 0$, démontrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \frac{\alpha}{4} \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

I.2.17. Établir les inégalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant \sqrt{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

I.2.18. Montrer que

(a) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} k a_k^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{k},$

(b) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^3 a_k^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^5}.$

INDEX