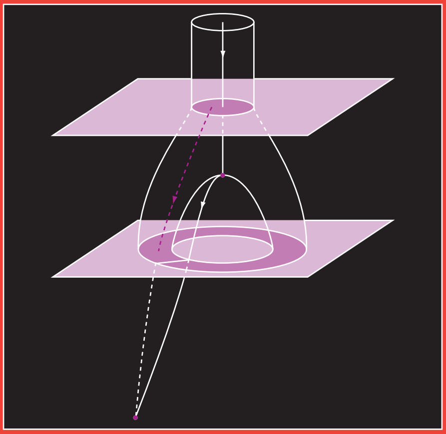
SAVOIRS MATHÉMATIQUES ACTUELS

THÉORIE DE MORSE ET HOMOLOGIE DE FLOER



MICHÈLE AUDIN
et MIHAI DAMIAN

EDP SCIENCES

CNRS ÉDITIONS

Michèle Audin et Mihai Damian

Théorie de Morse et homologie de Floer

SAVOIRS ACTUELS
EDP Sciences/CNRS Éditions

M. Audin
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université de Strasbourg et CNRS
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg cedex
France
E-mail : Michele.Audin@math.unistra.fr

M. Damian
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université de Strasbourg et CNRS
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg cedex
France
E-mail : Mihai.Damian@math.unistra.fr

ISBN EDP Sciences 978-2-7895-0518-1

ISBN CNRS Éditions 978-2-271-07087-6

Pour lui :
à lui, poète d'une sensibilité discrète, d'une finesse calorique intime et surtout d'une profonde compréhension de la spiritualité roumaine qui a créé cet état autochtone. Hommage au grand patriote qui se joint au voievodes.
Pour elle :
à elle, dont l'esprit de justice, la sensibilité et l'autorité humaine, crée le cadre dont a aussi besoin le football, comme toute tentative de rassembler les gens, les énergies et les passions, le profond hommage de celui qui fait des effort dans le sport, se heurtant à tous les obstacles pour comprendre la vérité.

This page intentionally left blank

TABLE DES MATIÈRES

Appendices : ce qu'il faut savoir pour lire ce livre

PRÉFACE

L'homologie de Floer est aujourd'hui une technique indispensable de la topologie symplectique. Inspirée d'idées de Witten et de Gromov dans les années 1980, elle a permis depuis de résoudre de nombreux problèmes difficiles, et elle continue de le faire.

Ce livre est consacré à la solution d'un de ces problèmes, une célèbre conjecture due à Arnold, qui propose de minimiser le nombre de trajectoires périodiques d'un système hamiltonien par un invariant qui ne dépend que de la topologie de la variété symplectique sur laquelle évolue ce système. Cette minoration ressemble beaucoup aux célèbres inégalités de Morse, qui minorent le nombre de points critiques d'une fonction. Une ressemblance qui n'a rien de fortuit : l'homologie de Floer est un analogue (en dimension infinie) de l'homologie de la variété telle qu'elle est calculée par le complexe de Morse « à la Witten » : le rôle principal est tenu dans les deux cas par les espaces de modules de trajectoires joignant les points critiques (d'une fonction pour Morse, d'une fonctionnelle pour Floer).

En 2004–2005, nous avions proposé un cours, deux cours, sur ces notions. Nous avons commencé par la théorie de Morse, bien sûr, il y avait des étudiants, nous aimions beaucoup le livre de Milnor dans lequel nous avions l'un et l'autre appris l'existence, la multitude et surtout l'utilité des fonctions de Morse, nous avons donc commencé à rédiger des notes pour les étudiants, c'était assez facile...

Et puis, c'est devenu plus difficile — il n'existait aucun livre donnant le point de vue plus moderne sur l'homologie de Morse, avec la construction et les propriétés d'invariance du complexe de Morse défini à l'aide des espaces de trajectoires, qui nous permettrait d'aller vers la construction du complexe de Floer — copier n'était plus possible, il nous a donc fallu là un peu d'imagination.

La première partie du cours terminée à la satisfaction des auditeurs, nous avons abordé l'homologie de Floer. Les objets et les techniques, que nous, topologues et géomètres, utilisons tous les jours, de l'homologie de Morse, se sont transfigurés en objets et techniques de l'homologie de Floer. Le charme, un des charmes, et la force, de cette théorie, résident en ceci qu'elle utilise, outre la géométrie et la topologie, beaucoup d'analyse, des opérateurs de Fredholm et des espaces de Sobolev. Exposer ceci à d'authentiques étudiants n'est pas une tâche très facile, même en s'y mettant à deux. C'est pourquoi nous avons décidé de persister à rédiger des notes de cours.

Si de nombreux travaux de recherche ont utilisé et utilisent toujours ces techniques, si de nombreux étudiants en ont aujourd'hui besoin, il faut bien dire qu'il n'y avait pas, sur ce sujet-là non plus, de livre raisonnablement auto-suffisant.

Cinq années se sont écoulées, au cours desquelles nous avons affiné, corrigé, allongé, précisé, majoré, minoré, égalé, comparé, énoncé et démontré soixante-treize théorèmes, cent vingt et une propositions et cent six lemmes, dessiné quatre-vingt-dix-huit figures (et posé un certain nombre d'exercices, dont, contrairement à la coutume, aucun ne contient la démonstration d'un résultat important « laissé en exercice aux lecteurs »)...

Cinq années se sont écoulées, au cours desquelles d'autres étudiants ont lu ces notes et nous ont fait des commentaires qui nous ont convaincus qu'elles répondaient à un besoin et qu'il serait stupide de ne pas les améliorer encore pour en faire un livre.

Voici ce livre, consacré à la puissance et la gloire des méthodes homologiques à la Morse-Floer.

Ce qu'il faut savoir... Il était difficile de prétendre écrire un ouvrage auto-suffisant. Pourtant, celui-ci est issu d'un cours professé devant d'authentiques étudiants de mastère — à qui nous avons dû commencer par « rappeler » ce qu'était une variété. En pensant à eux et à leurs semblables, nous avons donc regroupé à la fin du livre et en trois chapitres « ce qu'il faut savoir », les résultats de base que nous utilisons, en géométrie différentielle, topologie algébrique, analyse. Il y a parfois des définitions et/ou des démonstrations complètes, parfois des indications. Un index devrait aider à s'y retrouver.

Remerciements. À tous les étudiants qui ont subi ce cours, notamment à Emily Burgunder, Olivier Dodane, Shanna Li, Alexandre Mouton, Emmanuel Rey, Nelson Souza.

À Agnès Gadbled qui a relu avec soin de nombreuses versions préliminaires de ce texte. À Clémence Labrousse et Vincent Humilière pour leurs questions et leurs suggestions. À André Carneiro pour les corrections qu'il nous a suggérées. À Emmanuel Opshtein pour les réponses qu'il nous a aidés à trouver.

À François Laudenbach, Dusa McDuff. À Jean-Claude Sikorav pour sa lecture attentive et enthousiaste, les nombreuses pages de commentaires qu'il nous a faites, les discussions stimulantes que nous avons eues avec lui.

À Claude Sabbah, pour ses conseils techniques, pour avoir accueilli ce livre dans sa collection et surtout pour l'avoir patiemment attendu.

This page intentionally left blank

PARTIE I

THÉORIE DE MORSE

This page intentionally left blank

INTRODUCTION DE LA PREMIÈRE PARTIE

Cette première partie est consacrée à la théorie de Morse, avec en ligne de mire le complexe défini par les points critiques d'une fonction de Morse et les trajectoires d'un champ de gradients.

C'est une théorie dont la toute première pierre est la remarque que l'étude d'une fonction (bien choisie) peut donner des informations assez précises sur la topologie d'une variété. L'exemple le plus classique — mais les exemples les plus classiques sont souvent les plus instructifs — est celui de la fonction « hauteur » $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ et de sa restriction aux différentes sous-variétés représentées sur les figures. La fonction f est, dans les trois cas considérés, la restriction de $(x, y, z) \mapsto z$.

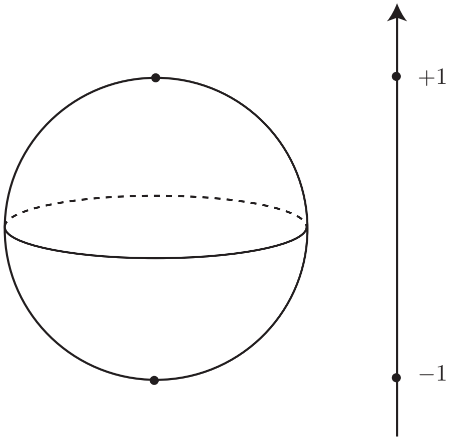


Figure 1. La sphère ronde

La première figure (figure 1) représente la sphère « ronde », c'est-à-dire la sphère unité

$$S^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Les niveaux $f^{-1}(a)$ sont

$$\begin{cases} \varnothing & \text{si } a < -1 \\ \text{un point} & \text{si } a = -1 \\ \text{un cercle} & \text{si } -1 < a < 1 \\ \text{un point} & \text{si } a = 1 \\ \varnothing & \text{si } a > 1. \end{cases}$$

En remontant les valeurs de la fonction, on constate que les niveaux ont toujours la même topologie, jusqu'à ce que se produise un accident, où la topologie change, puis reste la même jusqu'à l'accident suivant.

Il en est de même pour les « sous-niveaux », c'est-à-dire ce qui se trouve au-dessous d'un niveau donné, qui sont, dans ce cas, d'abord vides, puis (brièvement) un point, puis un disque, puis la sphère tout entière.

Les accidents sont les valeurs critiques de la fonction, correspondant aux points critiques, ceux où la différentielle de f s'annule, ceux pour lesquels le plan tangent est horizontal, les pôles nord et sud de la sphère. Bien sûr, le pôle sud est le minimum de la fonction et le pôle nord son maximum.

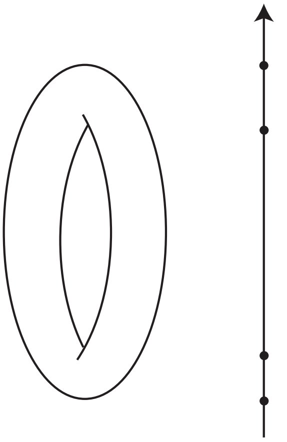


Figure 2. Le tore

La situation est analogue dans le cas du tore de la figure suivante (figure 2) à cette différence près qu'il y a maintenant des points critiques qui ne sont pas des extrema de la fonction, ce sont les deux points « selle ». Les niveaux correspondants sont des courbes en forme de huit (dont l'une est représentée sur la figure), et donc pas des sous-variétés, on aura remarqué que les niveaux réguliers, non critiques, doivent, eux, être des sous-variétés (à cause du théorème de submersion).

Un des premiers résultats de cette théorie est un théorème, dû à Reeb (au moins pour les fonctions de Morse) et que nous démontrerons (dans ce cas) qui affirme qu'une variété compacte qui possède une fonction avec seulement deux points critiques est homéomorphe à une sphère. Mais bien sûr, il y a sur la sphère des fonctions avec plus de points critiques.

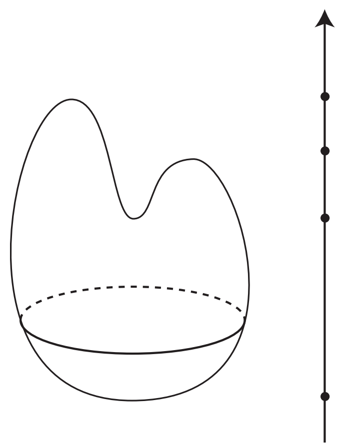


FIGURE 3. Une autre sphère

La troisième figure (figure 3) est là pour illustrer ce fait. Parce que c'est pratique à visualiser, on a gardé la « même » fonction hauteur et on a « fait un creux » dans la sphère, en douceur, ce qui fait que la sous-variété est bien sûr toujours difféomorphe à une sphère, mais que maintenant, la fonction a deux maxima locaux et un point selle. On remarquera toutefois que la parité du nombre de points critiques de la nouvelle fonction est la même que celle de l'ancienne. Si on les suppose non dégénérés, une importante propriété qui sera définie plus bas (et que vérifient les points critiques représentés sur nos figures), le nombre de points critiques comptés modulo 2 est égal à la caractéristique d'Euler modulo 2 de la variété, un invariant qui ne dépend pas de la fonction mais seulement de la variété.

L'idée des espaces de trajectoires de Witten permet de mettre en évidence un invariant plus fin : on voit bien que le tore et la sphère sont des variétés très différentes, même si toutes les deux possèdent une fonction avec quatre points critiques non dégénérés. Cet outil est ce que l'on appelle aujourd'hui l'homologie de Morse $HM_k(V)$ de la variété. C'est l'homologie d'un complexe, le complexe de Morse, construit à partir des points critiques d'une fonction de Morse en « comptant » les trajectoires d'un champ de vecteurs qui les relient... une homologie qui ne dépend, *in fine*, que (du type de difféomorphisme) de la variété. Les remarques que nous venons de faire à propos du nombre de points critiques sur telle ou telle variété s'expriment en les fameuses « inégalités de Morse » : le nombre c_k de points critiques d'indice k d'une fonction de Morse sur une variété satisfait à

$$c_k \geq \dim HM_k(V).$$

Ces objets forment donc naturellement le sujet de la première partie de ce texte.

CHAPITRE 1

FONCTIONS DE MORSE

Toutes les variétés et les fonctions que nous considérons ici sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, même si on n'a besoin en général que de régularité $\mathcal{C}^1$!

1.1. Définition des fonctions de Morse

1.1.a. Points critiques, non-dégénérescence. Soit V une variété et soit $f : V \to \mathbf{R}$ une fonction.

Remarque 1.1.1. Au moins si V est compacte, f a toujours des points critiques, puisqu'elle a au moins un maximum et un minimum.

En un point critique de f, on peut définir la *hessienne* ou dérivée seconde.

Remarque 1.1.2. Rappelons qu'une fonction sur une variété n'a pas de dérivée seconde : il est toujours possible de calculer une dérivée seconde dans une carte, mais le résultat dépend de la carte utilisée. La dérivée seconde est bien définie sur le noyau de la dérivée première... Ici nous nous contenterons de la définir en les points critiques. Voir l'exercice 1 page 17.

Plutôt que d'utiliser une carte et de montrer que le résultat n'en dépend pas, faisons appel à un argument plus intrinsèque (comme dans [**47**, p. 4]). Si x est un point critique de f et si X et Y sont des vecteurs tangents à V en x, posons

$$(d^2 f)_x(X, Y) = X \cdot (\widetilde{Y} \cdot f)(x)$$

où nous avons noté $\widetilde{Y}$ un champ de vecteurs prolongeant localement Y. Comme

$$X \cdot (\widetilde{Y} \cdot f)(x) - Y \cdot (\widetilde{X} \cdot f)(x) = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_x \cdot f = (df)_x([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_x) = 0,$$

l'expression est une forme bilinéaire symétrique en X et Y. Le même calcul montre aussi que cette forme est bien définie, le résultat ne dépend pas du prolongement $\widetilde{Y}$ choisi.

This page intentionally left blank

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. I. Arnold – « Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique », *C. R. Acad. Sci. Paris* **261** (1965), p. 3719–3722.

[2] ———, « First steps in symplectic topology », *Russian Math. Surveys* **41** (1986), p. 1–21.

[3] M. Audin – « Symplectic and almost complex manifolds », in *Holomorphic curves in symplectic geometry* [**6**], p. 41–74.

[4] ———, *Topologie : Revêtements et groupe fondamental*, ULP, Strasbourg, 2004, Cours de Magistère 2^{e} année, disponible sur `http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin`.

[5] ———, *Torus actions on symplectic manifolds*, Progress in Math., Birkhäuser, 2004, Revised and enlarged edition.

[6] M. Audin & J. Lafontaine (éds.) – *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Progress in Math., vol. 117, Birkhäuser, 1994.

[7] M. Berger & B. Gostiaux – *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, Presses Universitaires de France, 1987, Réédition d'un ouvrage paru chez Armand Colin.

[8] P. Biran – « Lagrangian barriers and symplectic embeddings », *Geom. Funct. Anal.* **11** (2001), p. 407–464.

[9] J.-M. Bony – *Cours d'analyse (Théorie des distributions et analyse de Fourier)*, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2001.

[10] R. Bott – « Lectures on Morse theory, old and new », *Bull. Amer. Math. Soc.* **7** (1982), p. 331–358.