

PHYSIQUE

Michel PEYRARD - Thierry DAUXOIS

• Physique • des solitons



SAVOIRS ACTUELS

 CNRS EDITIONS

Extrait de la publication


EDP
SCIENCES

Michel Peyrard et Thierry Dauxois

Physique des solitons

S A V O I R S A C T U E L S

EDP Sciences/CNRS ÉDITIONS

Illustration de couverture : Collision de deux solitons de faible amplitude photographiée sur une plage de l'état d'Oregon sur la côte ouest des États-Unis (Photographie Terry Toedtemeier, 1978).

© 2004, **EDP Sciences**, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf, 91944 Les Ulis Cedex A

et

CNRS ÉDITIONS, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

ISBN EDP Sciences 2-86883-732-8

ISBN CNRS ÉDITIONS 2-271-06267-5

Avant-propos

DEPUIS LA PREMIÈRE OBSERVATION d'un *soliton* par John Scott Russell en 1834, ces ondes solitaires à la stabilité exceptionnelle ont fasciné les scientifiques, d'abord en raison de leurs propriétés expérimentales très spectaculaires, de leur indéniable élégance, mais également à cause des propriétés mathématiques remarquables des systèmes intégrables ayant des solutions de type soliton. L'aspect mathématique a été privilégié dans la plupart des ouvrages consacrés aux solitons car il conduit à de très beaux développements théoriques comme par exemple la méthode d'inversion des données de diffusion qui permet de résoudre une équation *non linéaire* complexe par une série d'étapes qui sont toutes *linéaires* (cf. chap. 7).

Pourtant, au delà des aspects mathématiques, la *physique* des solitons est toute aussi intéressante et pertinente pour la recherche moderne. Ainsi, de nombreuses d'expériences sur la condensation de Bose-Einstein, objet du prix Nobel de Physique 2001, s'analysent à partir de l'équation de Schrödinger non linéaire, présentée au chapitre 3, qui est l'une des grandes équations de la théorie des solitons. Le prix Nobel de Chimie, attribué en 2000 à Heeger, MacDiarmid et Shirakawa doit encore plus aux solitons car les porteurs de charge dans les polymères conducteurs sont des solitons. Le chapitre 13 s'appuie sur un article de Su, Schrieffer et Heeger pour expliquer ces phénomènes.

Ainsi, la physique des solitons est un domaine actif de la recherche, auquel nous avons contribué, mais ce livre n'est cependant pas un ouvrage de recherche. Il se propose de présenter la physique des solitons de manière pédagogique, abordable par un étudiant en fin de licence ou début de master ayant seulement des connaissances de base en physique générale, en mécanique analytique et en mécanique quantique. Il est issu d'un cours donné d'abord par Michel Peyrard à l'université de Dijon puis sous une forme plus complète dans le cadre du DEA de Physique statistique et Phénomènes non linéaires de l'École Normale Supérieure de Lyon, et poursuivi maintenant par Thierry Dauxois dans le Master de Sciences de la matière de l'École Normale Supérieure de Lyon.

L'ouvrage n'a pas la prétention d'être exhaustif mais il est conçu de façon à donner néanmoins une vision assez complète du sujet. Les fondements sont introduits dans la partie I qui présente les grandes équations à solitons à

partir d'exemples de la physique macroscopique. Les méthodes théoriques sont présentées dans la partie II. Le choix des développements dans ce domaine a été effectué en pensant aux situations physiques comme le montrent les applications présentées dans les parties III et IV consacrées à des problèmes de la physique des solides ou des macromolécules biologiques. La modélisation, qui est l'étape qui permet de passer du système physique aux équations non linéaires qui le décrivent, est illustrée tout au long de l'ouvrage, mais aussi discutée dans un chapitre spécifique (chap. 4) car c'est un point difficile et particulièrement important.

L'approche en terme de solitons permet de renouveler en profondeur le point de vue sur certains problèmes physiques. Nous montrons ainsi comment les solitons peuvent être utilisés pour traiter la physique statistique des ferro-électriques (chap. 10) ou d'un modèle pour l'ADN (chap. 15). La bibliographie contient de nombreuses références d'articles qui devraient permettre au lecteur qui le souhaite d'aller plus loin et de trouver les éléments pour aborder la recherche sur la physique des solitons. Enfin, nous avons souhaité inclure quelques éléments biographiques sur les principaux fondateurs de ce domaine car, comme le disait le philosophe Whitehead au début du XX^e siècle, « une science qui refuse de se souvenir de ses fondateurs est condamnée ».

L'ouvrage a mûri au fil des années de cours et de travaux dirigés, mais il doit aussi beaucoup à tous ceux qui en ont fait une relecture critique, en particulier Geneviève Peyrard qui a fait de multiples remarques pertinentes. Plusieurs collègues, Mariette Barthès, Freddy Bouchet, Hervé Courtois, Jacques Dauxois, Sébastien Dusuel, Jean-Noël Gence, Ioannis Kourakis, Juan Mazo, Guy Millot, Jean-Pierre Nguenang, Sébastien Paulin, Hicham Qasmi, Florence Raynal, Yves-Henri Sanéjouand, ont examiné plus particulièrement les chapitres proches de leur domaine de recherche. Nous remercions également Larissa Brizhik, Lincoln D. Carr, Thierry Cretegny, Bernard Deconinck, Chris Eilbeck, Ying Li, Robert I. Odom, Sylvian R. Ray, Harvey Segur, Terry Toedtemeier, Nadezhda Tsyphkina, Kathleen T. Zanotti de nous avoir autorisés à utiliser certaines photographies ou pour des informations complémentaires. Nous tenons enfin à remercier tout spécialement Martin D. Kruskal et Norman J. Zabusky de nous avoir fourni des éléments sur les débuts de l'histoire des « solitons ».

Février 2004,

Michel Peyrard, Thierry Dauxois.

Table des matières

Avant-propos	v
Introduction	xv
I Les différentes classes de solitons	1
1 L'équation de Korteweg-de Vries	3
1.1 La découverte	3
1.1.1 Les observations de John Scott Russell	3
1.1.2 L'interprétation de Korteweg-de Vries	8
1.1.3 Propriétés de l'équation de Korteweg-de Vries et de ses solutions	9
1.2 Les solutions de l'équation de Korteweg-de Vries	14
1.2.1 Solutions à profil constant	14
1.2.2 Solutions multisolitons	17
1.3 Relations de conservation	20
1.4 Lignes électriques non-linéaires	21
1.4.1 Description du problème physique	21
1.4.2 Approximation linéaire. Relation de dispersion	23
1.4.3 L'équation non-linéaire dans la limite des milieux continus	24
1.4.4 Les solutions quasi-solitons de la chaîne électrique	26
1.4.5 La limite Korteweg-de Vries pour la chaîne électrique	27
1.5 Ondes de pression sanguine	29
1.6 Ondes internes en océanographie	35
1.7 La généralité de l'équation de Korteweg-de Vries	37
2 L'équation de sine-Gordon	39
2.1 Un exemple mécanique simple : la chaîne de pendules couplés	39

2.2	Les solutions de l'équation de sine-Gordon	41
2.2.1	Topologie du paysage énergétique	41
2.2.2	Les solutions de faible amplitude : la limite linéaire	43
2.2.3	Solutions solitons	44
2.2.4	Énergie du soliton	48
2.2.5	Solutions multisolitons	50
2.2.6	La solution breather	52
2.3	Étude des jonctions Josephson longues	56
2.3.1	Équation dynamique de la jonction	57
2.3.2	Applications aux propriétés d'une jonction Josephson	63
2.3.3	Signification physique du soliton : fluxon	65
2.4	Autres exemples de solitons topologiques	66
2.4.1	Le modèle ϕ^4	67
2.4.2	Le modèle double sine-Gordon (DSG)	68
3	L'équation de Schrödinger non-linéaire	71
3.1	Ondes non-linéaires dans la chaîne de pendules	72
3.2	Propriétés de l'équation de NLS	76
3.2.1	La solution soliton de l'équation de NLS	77
3.2.2	La localisation de l'énergie par instabilité modulationnelle	80
3.2.3	Relation entre le breather de SG et le soliton de NLS	83
3.3	Relations de conservation	85
3.3.1	Le lagrangien de NLS	85
3.3.2	L'hamiltonien de NLS	86
3.4	Théorème de Noether	89
3.4.1	Rappel du théorème	89
3.4.2	Application à l'équation NLS	90
3.5	Lignes électriques non-linéaires	91
3.6	Solitons dans les fibres optiques	92
3.6.1	Origine de la non-linéarité : polarisation non-linéaire	92
3.6.2	La structure du champ électrique dans la fibre	95
3.6.3	La propagation non-linéaire le long de la fibre	98
3.6.4	La confrontation avec l'expérience	103
3.6.5	Application aux communications par fibre optique	105
3.7	Auto-focalisation en optique	106
3.8	Conclusion	111
4	Modélisation : ondes dans un plasma	113
4.1	Introduction	113
4.2	Le plasma	114
4.2.1	Physique d'un plasma	114
4.2.2	Températures et équations d'état	116
4.2.3	Passage à des équations sans dimension	118
4.3	Étude de la dynamique linéaire	119

4.4	Étude non-linéaire	120
4.4.1	Le plasma peut être décrit par l'équation de KdV	120
4.4.2	La relation de dispersion	123
4.5	Obtention de l'équation de NLS	123
4.6	Observations expérimentales	127
4.7	Discussion	129
4.7.1	Les ondes hydrodynamiques	130
4.7.2	Les lignes électriques	131
II	Méthodes mathématiques d'étude des solitons	135
	Avant-propos	137
5	Linéarisation autour du soliton	139
5.1	Spectre des excitations d'un soliton sine-Gordon	139
5.2	Application : perturbations du soliton	142
5.2.1	Présentation	142
5.2.2	Exemple : réponse du soliton à une force extérieure en présence de dissipation	143
5.3	Spectre des excitations d'un soliton ϕ^4	148
6	Méthode des coordonnées collectives	155
6.1	La méthode du lagrangien effectif	155
6.2	Introduction d'une seconde coordonnée collective	159
7	La méthode inverse de diffusion	165
7.1	La méthode inverse pour l'équation de Korteweg-de Vries	165
7.1.1	Le principe de la méthode inverse	165
7.1.2	L'inversion des données de diffusion	167
7.1.3	L'évolution temporelle des données de diffusion	169
7.1.4	Exemples d'applications	172
7.2	« Analyse de Fourier non-linéaire »	175
7.2.1	Une étape de la généralisation : la méthode de Lax	176
7.2.2	La méthode (AKNS) Ablowitz-Kaup-Newell-Segur	179
7.2.3	La méthode inverse et la théorie des perturbations	181
III	Exemples en physique des solides	183
	Avant-propos	185
8	Le problème de Fermi-Pasta-Ulam	187

9	Un modèle simple de dislocation	197
9.1	Déformations plastiques des cristaux	197
9.2	Le modèle Frenkel-Kontorova	200
9.3	L'approximation des milieux continus	202
9.4	Les dislocations sont-elles des solitons?	203
9.5	Les applications	207
10	Parois de domaines ferroélectriques	211
10.1	Matériaux ferroélectriques	211
10.1.1	Ferroélectrique de type déplacement : titanate de baryum	211
10.1.2	Ferroélectrique de type ordre-désordre : nitrite de sodium	212
10.1.3	Les parois de domaines ferroélectriques	214
10.2	Modèle unidimensionnel de ferroélectrique	215
10.3	Structure des parois de domaines	216
10.3.1	Les solutions de faible amplitude : les phonons	217
10.3.2	Les solutions de grande amplitude : structure des parois de domaines ferroélectriques	217
10.3.3	Énergie de paroi	219
10.4	Réponse diélectrique d'un ferroélectrique	220
10.5	Thermodynamique d'un système non-linéaire	222
10.5.1	La fonction de corrélation	222
10.5.2	Le modèle du gaz de solitons	223
10.5.3	La méthode de l'intégrale de transfert	225
10.5.4	Détermination du spectre de l'opérateur de transfert	229
10.5.5	Conclusion	233
11	Les phases incommensurables	235
11.1	Exemples en physique des matériaux	235
11.2	Le modèle de Frenkel et Kontorova	236
11.3	Phases commensurables	237
11.4	La transition commensurable-incommensurable	238
11.5	Structure de la phase incommensurable	239
11.6	Calcul de δ_c	241
11.7	Diagramme de phases	243
11.8	Dynamique de la phase incommensurable	245
11.9	Formation des discommensurations	248
11.10	Conclusion	251
12	Solitons dans les systèmes magnétiques	253
12.1	Ferromagnétisme et antiferromagnétisme	253
12.2	Dynamique d'une chaîne de spins	255

12.3	Magnons et solitons	258
12.3.1	Les magnons	258
12.3.2	Les solitons	260
12.4	Validité de l'approximation de sine-Gordon	262
12.4.1	Ordres de grandeur	262
12.4.2	Simulations numériques	264
12.4.3	Observations expérimentales	266
12.5	Chaînes de spins antiferromagnétiques	268
13	Polymères conducteurs	271
13.1	Les matériaux	271
13.1.1	Le polyacétylène	271
13.1.2	Les autres polymères conducteurs	273
13.2	Le modèle physique du polyacétylène	274
13.2.1	La dynamique des atomes	275
13.2.2	L'hamiltonien électronique	275
13.3	L'état fondamental du polyacétylène	276
13.3.1	Rappel de théorie des bandes	277
13.3.2	La structure de bandes du polyacétylène	282
13.4	L'état excité du polyacétylène	285
13.4.1	La méthode	285
13.4.2	La solution soliton	287
13.5	Le mécanisme de la conduction électrique	289
13.5.1	Le principe	289
13.5.2	La dynamique du soliton chargé	292
13.6	Vérification expérimentale	294
13.6.1	Le mode d'oscillation de la pente du soliton	294
13.6.2	La solution linéarisée	295
13.6.3	L'observation du mode interne du soliton	296
13.7	Autres excitations non-linéaires	297
IV	Excitations non-linéaires dans les molécules biologiques	299
	Avant-propos	301
14	Localisation d'énergie dans les protéines	305
14.1	Le mécanisme proposé par Davydov	305
14.1.1	L'hamiltonien de Davydov	307
14.1.2	La méthode variationnelle de l'ansatz D_2	310
14.1.3	Les équations d'évolution des $\beta_n(t)$	313
14.1.4	Les équations d'évolution des $a_n(t)$	314

14.2	Étude des équations de Davydov	320
14.3	Le soliton de Davydov existe-t-il?	323
14.4	Le cristal d'acétanilide	324
15	Dynamique non-linéaire de l'ADN	331
15.1	Un modèle simple pour l'ADN	332
15.1.1	Structure statique de l'ADN	332
15.1.2	Les différents processus dynamiques	333
15.1.3	Le modèle	338
15.2	Dynamique non-linéaire de l'ADN	343
15.2.1	Équations adimensionnées	343
15.2.2	Solution non-linéaire des équations du mouvement	344
15.2.3	Dynamique du modèle en contact avec un bain thermique	347
15.3	Physique statistique de la dénaturation	351
15.3.1	Étude qualitative de la transition de phase	352
15.3.2	Le problème associé de l'oscillateur de Morse	355
15.3.3	Le paramètre d'ordre pour l'ADN	356
15.4	Une autre approche de la dénaturation	358
15.4.1	La paroi de domaine	358
15.4.2	Fluctuations autour de la paroi de domaine	360
15.4.3	Énergie libre de la paroi de domaine	362
15.4.4	Discussion	365
	Conclusion : Les solitons existent-ils?	369
	Appendices	373
A	Ondes hydrodynamiques	375
A.1	Équations de base et conditions aux limites	375
A.1.1	Condition à la limite cinématique	376
A.1.2	Condition à la limite physique	377
A.2	Formulation mathématique du problème	377
A.2.1	Les équations de définition du problème	378
A.2.2	Pression statique et pression dynamique	379
A.2.3	Équations sans dimension	379
A.2.4	Hypothèses d'échelle	380
A.2.5	Le potentiel des vitesses	381
A.3	Étude de la limite linéaire	382
A.4	L'équation non-linéaire en eau peu profonde	383
B	Mécanique d'un système continu	387
B.1	Formulation lagrangienne	387
B.2	Formulation hamiltonienne	389

<i>Table des matières</i>	xiii
C États cohérents de l'oscillateur harmonique	391
Table des portraits	395
Bibliographie	397
Index	407

Introduction

LE XIX^e SIÈCLE et la première moitié du XX^e siècle ont marqué le triomphe de la *physique linéaire*, d'abord à travers les équations de Maxwell, puis avec la mécanique quantique dont tout le formalisme repose sur la linéarité associée au principe de superposition. Les outils mathématiques de la physique étaient eux-mêmes fondamentalement des outils linéaires comme la transformée de Fourier, la théorie de la réponse linéaire, les approches perturbatives, etc.

Bien entendu, les physiciens avaient identifié l'importance des phénomènes non linéaires qui apparaissaient dans les équations de Navier-Stokes de l'hydrodynamique, la théorie de la gravitation, les effets collectifs associés aux interactions entre particules en physique des solides, etc. Mais, dans la plupart des cas, on cherchait à éviter les non linéarités ou à les traiter comme des perturbations des théories linéaires.

En revanche, pendant les quarante dernières années, l'importance du *traitement intrinsèque* des non linéarités a été de mieux en mieux perçue et a conduit à deux concepts réellement révolutionnaires par rapport aux idées antérieures, l'attracteur étrange et le soliton.

Ces deux concepts correspondent à deux propriétés étonnantes des systèmes non linéaires, qui semblent contradictoires. L'attracteur étrange est associé à la notion de *chaos* dans un système régi par des équations déterministes. On le rencontre même dans des systèmes à faible nombre de degrés de liberté, que l'on aurait pu croire « simples ». Au contraire, le soliton concerne des systèmes à grand nombre de degrés de liberté. *A priori* il semble que l'addition de nouveaux degrés de liberté devrait compliquer le comportement, et pourtant ce n'est pas toujours le cas. Des *structures spatiales cohérentes* peuvent apparaître grâce à des effets collectifs et conduire au contraire à une *auto organisation*. La compréhension de la coexistence entre structures cohérentes et chaos dans les systèmes non linéaires est encore une question ouverte.

Le soliton est une *onde solitaire* c'est-à-dire localisée spatialement, dont les propriétés de stabilité sont spectaculaires. Dès sa première observation [135] en 1834 par un ingénieur hydrodynamicien, John Scott Russell, il a suscité passion et débats. J.S. Russell a été tellement fasciné par cette observation inattendue qu'il a consacré dix années de sa vie à étudier le phénomène, tandis

que les théories, fondées sur des approches linéarisées, montraient ... que le soliton ne pouvait pas exister. Le soliton a une histoire à éclipses puisqu'après l'observation de 1834, il a fallu attendre 1895 pour qu'une théorie [85] puisse en rendre compte grâce à l'équation obtenue par Korteweg et de Vries. Puis le phénomène a été oublié jusqu'à ce qu'une expérience numérique [55], faite par Fermi, Pasta et Ulam en 1953 sur un des premiers ordinateurs à Los Alamos, révèle un phénomène étonnant. Un réseau unidimensionnel de particules couplées par un potentiel non linéaire n'atteignait pas toujours l'équilibre thermodynamique comme on le pensait. L'énergie injectée initialement dans un mode commençait, comme prévu, à se distribuer vers les autres modes, mais elle revenait ensuite pratiquement intégralement vers le mode excité initialement. Ce n'est que dix ans plus tard que l'explication a été donnée par Zabusky et Kruskal [160] ; elle fait intervenir les solitons comme nous le verrons dans ce livre. C'est ce travail qui, en 1965, a introduit le terme de *soliton*. Ce n'est pas un hasard si ce nom fait penser à celui d'une particule. Le soliton est une onde, mais il correspond aussi à un maximum localisé dans la densité d'énergie du système, qui se propage en conservant sa forme et sa vitesse, comme le ferait une particule. On dispose ainsi d'une solution d'une équation de champ *classique* qui possède à la fois les propriétés d'une quasi-particule et celles d'une onde. On trouve là des caractéristiques que l'on n'attend que dans les systèmes quantiques. L'analogie peut être poussée plus loin puisqu'on peut même mettre en évidence un effet tunnel pour les solitons [114].

Le travail de Zabusky et Kruskal a constitué un véritable tournant dans l'histoire des solitons qui, à partir de cette date, sont restés sur le devant de la scène et ont donné lieu à d'innombrables travaux, aussi bien sur le plan mathématique que sur le plan physique.

Les équations à solitons, au sens mathématique du terme, fournissent des exemples remarquables de systèmes totalement intégrables possédant un nombre infini de degrés de liberté. C'est la raison pour laquelle elles ont tant intéressé les mathématiciens, au point que beaucoup d'ouvrages sur les solitons sont fortement orientés vers les aspects mathématiques de la théorie.

Pourtant les solitons concernent aussi les physiciens et ils sont même devenus indispensables pour décrire des phénomènes tels que la propagation de certaines ondes en hydrodynamique, les ondes localisées dans les plasmas astrophysiques, la propagation de signaux dans les fibres optiques, ou des aspects beaucoup plus microscopiques comme les phénomènes de transport de charge dans les polymères conducteurs, les modes localisés dans des cristaux magnétiques, la dynamique de macromolécules biologiques comme l'ADN et les protéines par exemple. Bien entendu, tous ces systèmes ne sont décrits qu'approximativement par les équations de la théorie des solitons. On parle alors de quasi-solitons. Mais la caractéristique remarquable des solitons est qu'ils sont exceptionnellement stables vis-à-vis des perturbations. Ils sont en outre capables de se former spontanément dans un système physique auquel on fournit de l'énergie, par exemple sous forme thermique, par une onde

électromagnétique ou une action mécanique, même si l'excitation initiale ne correspond pas exactement à un soliton. C'est cette propriété qui fait tout l'intérêt des solitons en physique car, si un système possède des caractéristiques permettant l'existence de solitons, et nous verrons que c'est le cas pour beaucoup d'entre eux, il existe alors une très forte chance qu'une excitation intense conduise à leur formation.

Les solitons fournissent souvent une approche fructueuse pour décrire la physique d'un système non linéaire. Au lieu de faire une approximation linéaire, puis de traiter les non linéarités comme une perturbation, il peut être beaucoup plus efficace de décrire approximativement la physique du système par une équation à solitons puis, si nécessaire, de tenir compte des contributions qui perturbent les solitons.

L'objet de cet ouvrage est de traiter la *physique des solitons* en montrant comment ce concept intervient dans de nombreux domaines grâce à un parcours en trois étapes.

La première partie présente les grandes classes d'équations à solitons à partir de situations tirées de la physique macroscopique. Dans chaque cas nous partons d'un exemple où l'observation directe des solitons est facile et nous montrons comment les équations physiques conduisent à des équations de champ non linéaires ayant des solutions solitons. Cette partie permet de comprendre les principales propriétés des solitons et les caractéristiques qu'un système physique doit présenter pour permettre leur existence. Le dernier chapitre de cette première étape discute plus en détails la modélisation en termes de solitons en s'appuyant sur la physique des plasmas. Il montre en particulier comment *un* système donné peut être décrit par *plusieurs* types d'équations à solitons, selon les conditions dans lesquelles on le place.

La deuxième partie introduit quelques méthodes mathématiques pour l'étude des solitons. Bien que les aspects mathématiques ne soient pas l'objectif principal de l'ouvrage, ces méthodes sont importantes pour les applications physiques car le système auquel on s'intéresse n'est jamais décrit exactement par une équation à solitons. Il faut donc pouvoir évaluer et étudier l'influence des termes que l'on a négligés quand on a proposé une description par une équation à solitons. Cette partie présente des techniques qui sont rarement introduites dans les ouvrages traitant de la théorie mathématique des solitons car elles concernent justement des systèmes qui ne sont pas exactement décrits par une équation à solitons. Le physicien a aussi besoin de savoir comment évolue dans le temps une condition initiale appliquée à un système. Pour répondre à cette question on peut faire appel à une méthode mathématique très élégante, la méthode d'inversion des données de diffusion, qui parvient à réduire la recherche de la solution d'une équation non linéaire à une séquence d'opérations linéaires. Nous présentons une introduction à cette méthode.

La dernière étape, constituée des troisième et quatrième parties de l'ouvrage, est consacrée à la physique microscopique – physique des solides ou physique des molécules biologiques – où les descriptions en termes de solitons ont permis de traiter de nombreux problèmes. À cette échelle on ne « voit » plus directement les solitons, mais on les détecte par leur influence sur les propriétés du système. Outre le passage des équations physiques aux équations à solitons, comme dans la première partie, il faut donc aussi discuter les méthodes d'observation des solitons. De plus, à ce niveau, les fluctuations thermiques ne sont plus négligeables. Elles peuvent interagir avec les solitons dont il faut étudier la dynamique dans un système qui n'est plus au repos. Par ailleurs, les solitons eux-mêmes interviennent directement dans les propriétés thermodynamiques du système que leur présence peut modifier. Nous verrons aussi, par exemple dans les ferroélectriques ou dans le cas de l'ADN, que le concept de soliton est très puissant pour étudier théoriquement la thermodynamique de certains systèmes.

La beauté de la science du non linéaire se situe sans doute dans les liens qu'elle tisse entre différents domaines qui partagent une description mathématique commune. Cette généralité n'est pas sans rappeler celle de la thermodynamique puisque dans les deux cas c'est la structure mathématique abstraite (qui dérive bien sûr des symétries et des lois de la physique) qui est cruciale. Cet ouvrage montre comment quelques équations fondamentales permettent de traiter des systèmes physiques extrêmement variés, du macroscopique au microscopique, unifiant ainsi des domaines que l'on considère souvent comme totalement différents tels que l'hydrodynamique et la dynamique des macromolécules biologiques.

Bien entendu, il reste encore de nombreuses questions ouvertes dans la physique des systèmes non linéaires et les concepts que nous introduisons ici sont en train de pénétrer dans des domaines très différents tels que la biologie, la sociologie, l'économie, l'épidémiologie, l'écologie, etc. Nous espérons que cet ouvrage donnera au lecteur l'envie de s'aventurer dans l'exploration de ces questions ouvertes, en gardant à l'esprit l'étonnante capacité de nombreux systèmes à créer des structures spatiales cohérentes d'une remarquable stabilité qui peuvent influencer profondément leurs propriétés.

Première partie

Les différentes classes
de solitons

I

instabilité modulationnelle, 80, 131
 intégrale de transfert, 225, 351
 internes (onde), 35, 176
 invariance de Lorentz, 44, 46, 54, 66, 218
 inversion des données de diffusion, 165

J

jonctions Josephson, 56, 143

K

kink, 46, 49, 67, 150, 208, 262, 265, 288
 Klein, 56
 Kontorova, 202
 Kruskal, 195

L

lignes électriques, 21, 91, 129, 131

M

magnon, 256, 258, 259
 masse du soliton, 21, 50, 157, 220, 288, 293
 multisolitons, 47, 50, 68, 173

P

Pasta, 188
 Peierls-Nabarro
 barrière, 205
 fréquence, 247
 potentiel, 207, 248, 268
 phase (vitesse de), 10, 24, 33, 43, 57, 84, 120, 217
 phase incommensurable, 235
 phonon, 54, 83, 206, 217, 232, 289, 307
 plasma, 114
 onde, 113
 polaron, 297
 polyacétylène, 271
 polymères, 271
 pression sanguine (onde), 29
 problème/paradoxe
 de Fermi-Pasta-Ulam, viii, 187
 protéine, 301, 305

R

relation de dispersion, 10, 23, 33, 37, 43, 74, 81, 91, 101, 103, 120, 123, 128, 130, 139, 175, 207, 217, 260, 327, 344, 361
 réplication de l'ADN, 334
 Russell, 5

S

sech, 8
 self-trapping, 77, 329
 simulation numérique, 12, 26, 70, 158, 187, 264, 297, 322, 347
 soliton
 dark soliton, 106
 enveloppe, 71
 non topologique, 5
 pulse, 9–12, 19
 topologique, 39
 spectre
 continu, 142, 163, 166, 170, 181
 discret, 142, 163, 355
 spins, 254, 290

T

température, 56, 116, 211, 222, 232, 255, 285, 322, 335, 347
 théorème de Noether, 89
 théorie des bandes, 277
 thermodynamique, 222, 351
 transcription de l'ADN, 334
 transitions de phase, 232, 342, 352, 365
 tsunamis, 13

U

Ulam, 189

V

variationnel(le), 85, 155, 286, 310, 320

Z

Zabusky, 195