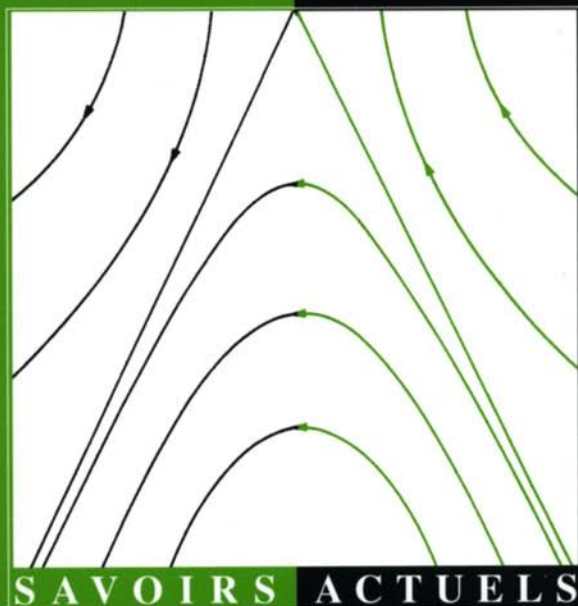


PHYSIQUE

Michel LE BELLAC

# Des phénomènes critiques • aux champs de jauge •

*Une introduction aux méthodes et aux applications  
de la théorie quantique des champs*



SAVOIRS ACTUELS

 CNRS EDITIONS

Extrait de la publication

 EDP  
SCIENCES

# Des phénomènes critiques aux champs de jauge



# Des phénomènes critiques aux champs de jauge

---

Michel Le Bellac

*Université de Nice*

S A V O I R S   A C T U E L S

---

EDP Sciences / CNRS ÉDITIONS

Troisième tirage corrigé, janvier 2002

© 2002, **EDP Sciences**, 7 avenue du Hoggar, BP 112, PA de Courtabœuf,  
91944 les Ulis Cedex A.  
**CNRS ÉDITIONS**, 15, rue Malebranche, 75005, Paris.

1<sup>re</sup> édition :

© 1988, **InterÉditions – CNRS ÉDITIONS**

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droits ou ayants cause est illicite » (alinéa 1<sup>er</sup> de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du code pénal.

ISBN : 2-86883-359-4

ISBN : 2-271-06023-0

# Table des matières

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| <i>Avant-propos</i> .....             | 15 |
| <i>Références générales</i> .....     | 19 |
| <i>Notations et conventions</i> ..... | 21 |

## PREMIÈRE PARTIE. PHÉNOMÈNES CRITIQUES

### CHAPITRE I. INTRODUCTION AUX PHÉNOMÈNES CRITIQUES

|                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>A. Transition ferromagnétique</b> .....                              | 25 |
| <b>B. Modèle d'Ising</b> .....                                          | 28 |
| B.1. Description du modèle .....                                        | 28 |
| B.2. Modèle d'Ising à une dimension .....                               | 30 |
| B.3. Fonction de corrélation du modèle d'Ising à une dimension .....    | 32 |
| B.4. Modèle d'Ising à deux dimensions .....                             | 34 |
| <b>C. Champ moyen</b> .....                                             | 34 |
| C.1. Equation du champ moyen .....                                      | 34 |
| C.2. Transition ferromagnétique en champ moyen .....                    | 36 |
| C.3. Comportement au voisinage de la transition .....                   | 38 |
| C.4. Exposants critiques $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ , $\delta$ ..... | 41 |
| <b>D. Fonctions de corrélation</b> .....                                | 43 |
| D.1. Définition, fonction génératrice .....                             | 43 |
| D.2. Théorème fluctuation-dissipation .....                             | 45 |
| D.3. Mesure de la fonction de corrélation .....                         | 46 |
| D.4. Exposants critiques $\eta$ et $\nu$ .....                          | 47 |
| D.5. Transformation de Legendre .....                                   | 49 |
| <b>E. Description qualitative des phénomènes critiques</b> .....        | 51 |
| <i>Exercices</i> .....                                                  | 55 |
| <i>Notes et références</i> .....                                        | 59 |

## CHAPITRE II. THÉORIE DE LANDAU

|                                                                              |    |
|------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>A. Hamiltonien de Ginzburg-Landau. Approximation de Landau</b> .....      | 62 |
| A.1. Cas d'un seul site .....                                                | 62 |
| A.2. Généralisation à $N$ sites .....                                        | 65 |
| A.3. Formulation continue .....                                              | 68 |
| <b>B. Théorie de Landau des transitions de phase</b> .....                   | 71 |
| B.1. Transitions du deuxième ordre .....                                     | 71 |
| B.2. Transitions du premier ordre .....                                      | 71 |
| <b>C. Fonctions de corrélation</b> .....                                     | 73 |
| <b>D. Critique de l'approximation de Landau et critère de Ginzburg</b> ..... | 75 |
| D.1. Critère de Ginzburg : première démonstration .....                      | 75 |
| D.2. Correction à la théorie de Landau .....                                 | 76 |
| D.3. Critère de Ginzburg : deuxième démonstration .....                      | 80 |
| <i>Exercices</i> .....                                                       | 82 |
| <i>Notes et références</i> .....                                             | 88 |

## CHAPITRE III. GROUPE DE RENORMALISATION

|                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>A. Notions fondamentales : blocs de spins, surface critique, points fixes</b> ..... | 91  |
| A.1. Blocs de spins et transformations non linéaires .....                             | 92  |
| A.2. Transformations linéaires .....                                                   | 95  |
| A.3. Surface critique et points fixes .....                                            | 97  |
| <b>B. Comportement au voisinage d'un point fixe. Exposants critiques</b> .....         | 100 |
| B.1. Discussion élémentaire .....                                                      | 101 |
| B.2. Linéarisation au voisinage du point fixe .....                                    | 102 |
| B.3. Fonction de corrélation en champ nul .....                                        | 105 |
| B.4. Fonction de corrélation $B \neq 0$ .....                                          | 107 |
| B.5. Energie libre .....                                                               | 108 |
| B.6. Lois d'échelle et remarques .....                                                 | 110 |
| <b>C. Modèle d'Ising sur réseau triangulaire et approximation des cumulants</b> .....  | 110 |

|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>D. Modèle gaussien</b> .....                                                   | 114 |
| D.1. Transformation dans l'espace de Fourier .....                                | 115 |
| D.2. Modèle gaussien .....                                                        | 118 |
| D.3. Point fixe gaussien .....                                                    | 121 |
| <b>E. Calcul des exposants critiques à l'ordre <math>\varepsilon</math></b> ..... | 125 |
| E.1. Point fixe non gaussien .....                                                | 125 |
| E.2. Equations différentielles de renormalisation .....                           | 126 |
| E.3. Méthode de « raccordement » .....                                            | 128 |
| <b>F. Champs marginaux et fonction <math>\beta(g)</math></b> .....                | 132 |
| F.1. Equation différentielle pour un champ marginal .....                         | 132 |
| F.2. Fonction de corrélation .....                                                | 139 |
| <i>Exercices</i> .....                                                            | 142 |
| <i>Notes et références</i> .....                                                  | 149 |

#### CHAPITRE IV. MODÈLES BIDIMENSIONNELS

|                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------|-----|
| <b>A. Modèle XY : étude qualitative</b> .....             | 153 |
| A.1. Développement haute température .....                | 153 |
| A.2. Développement basse température .....                | 155 |
| A.3. Rôle des vortex .....                                | 157 |
| <b>B. Analyse par le groupe de renormalisation</b> .....  | 159 |
| B.1. Modèle de Villain .....                              | 159 |
| B.2. Groupe de renormalisation pour le modèle XY .....    | 164 |
| <b>C. Modèles-<math>\sigma</math> non linéaires</b> ..... | 167 |
| <i>Exercices</i> .....                                    | 171 |
| <i>Notes et références</i> .....                          | 173 |

### DEUXIÈME PARTIE. THÉORIE DES PERTURBATIONS ET RENORMALISATION : CHAMP SCALAIRE EUCLIDIEN

#### CHAPITRE V. DÉVELOPPEMENT PERTURBATIF. DIAGRAMMES DE FEYNMAN

|                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------|-----|
| <b>A. Théorème de Wick et fonctionnelle génératrice</b> ..... | 178 |
| A.1. Fonction génératrice pour une seule variable .....       | 178 |
| A.2. Théorème de Wick .....                                   | 180 |
| A.3. Fonctionnelle génératrice .....                          | 181 |



|                                                                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>B. Développement perturbatif de <math>G^{(2)}</math> et <math>G^{(4)}</math>. Diagrammes de Feynman</b> ..... | 184 |
| B.1. Développement perturbatif pour une variable .....                                                           | 184 |
| B.2. Calcul de $G^{(2)}$ à l'ordre $g$ .....                                                                     | 185 |
| B.3. Calcul de $G^{(2)}$ à l'ordre $g^2$ .....                                                                   | 190 |
| B.4. Fonction de corrélation à quatre points $G^{(4)}$ .....                                                     | 194 |
| B.5. Règles de Feynman dans l'espace des $k$ .....                                                               | 197 |
| <b>C. Fonctions de corrélation connexes. Vertex propres</b> .....                                                | 201 |
| C.1. Cumulants d'une distribution de probabilité .....                                                           | 202 |
| C.2. Fonctionnelle génératrice des diagrammes connexes .....                                                     | 202 |
| C.3. Vertex propres et fonctionnelle génératrice .....                                                           | 205 |
| <b>D. Potentiel effectif. Développement en nombre de boucles</b> .....                                           | 211 |
| D.1. Symétrie brisée et potentiel effectif .....                                                                 | 211 |
| D.2. Développement en nombre de boucles .....                                                                    | 213 |
| <b>E. Evaluation des intégrales de Feynman</b> .....                                                             | 214 |
| E.1. Un cas élémentaire .....                                                                                    | 214 |
| E.2. Méthode de l'identité de Feynman .....                                                                      | 215 |
| E.3. Représentation paramétrique générale .....                                                                  | 217 |
| E.4. Calcul de $\eta$ à l'ordre $\varepsilon^2$ .....                                                            | 221 |
| <b>F. Comptage de puissances. Divergences ultraviolettes et infrarouges</b> .....                                | 223 |
| F.1. Argument topologique .....                                                                                  | 224 |
| F.2. Argument dimensionnel .....                                                                                 | 225 |
| F.3. Divergences infrarouges .....                                                                               | 226 |
| <i>Exercices</i> .....                                                                                           | 229 |
| <i>Notes et références</i> .....                                                                                 | 234 |

## CHAPITRE VI. RENORMALISATION

|                                                                                                |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>A. Introduction</b> .....                                                                   | 237 |
| A.1. Classification des théories .....                                                         | 237 |
| A.2. Diagrammes divergents d'une théorie renormalisable .....                                  | 238 |
| A.3. Régularisation .....                                                                      | 239 |
| <b>B. Renormalisation de la masse et de la constante de couplage</b> .....                     | 240 |
| B.1. $\Gamma^{(2)}$ à l'ordre d'une boucle : renormalisation de la masse .....                 | 241 |
| B.2. $\Gamma^{(4)}$ à l'ordre d'une boucle : renormalisation de la constante de couplage ..... | 242 |

|                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>C. Renormalisation du champ. Contre-termes</b> .....                        | 243 |
| C.1. $\Gamma^{(2)}$ à l'ordre de deux boucles : renormalisation du champ ..... | 243 |
| C.2. Contre-termes .....                                                       | 247 |
| <b>D. Cas général</b> .....                                                    | 249 |
| D.1. $\Gamma^{(4)}$ à l'ordre de deux boucles .....                            | 249 |
| D.2. Relation entre fonctions de corrélation nues et renormalisées .....       | 253 |
| D.3. Cas de la masse nulle .....                                               | 254 |
| <b>E. Opérateurs composés et leur renormalisation</b> .....                    | 255 |
| E.1. Fonctionnelle génératrice .....                                           | 256 |
| E.2. Exemple : $\Gamma^{(2,1)}$ à l'ordre d'une boucle .....                   | 258 |
| E.3. Comptage de puissances et contre-termes .....                             | 259 |
| <b>F. Schéma de soustraction minimal</b> .....                                 | 261 |
| <i>Exercices</i> .....                                                         | 265 |
| <i>Notes et références</i> .....                                               | 270 |

## CHAPITRE VII. ÉQUATIONS DE CALLAN-SYMANZIK

|                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>A. Renormalisation et groupe de renormalisation</b> .....                            | 273 |
| A.1. Analyse dimensionnelle .....                                                       | 273 |
| A.2. Identification de la constante de couplage renormalisée .....                      | 275 |
| A.3. Classification des théories .....                                                  | 278 |
| A.4. Identification de $Z_3$ .....                                                      | 279 |
| A.5. Schémas de renormalisation et définition de $\beta(g_0)$ ..                        | 280 |
| <b>B. Equations de Callan-Symanzik pour la théorie nue (<math>T = T_c</math>)</b> ..... | 283 |
| B.1. Divergences infrarouges .....                                                      | 283 |
| B.2. Démonstration de l'équation de Callan-Symanzik .....                               | 284 |
| B.3. Calcul de $\beta(g_0, \epsilon)$ à l'ordre d'une boucle .....                      | 286 |
| B.4. Solution de l'équation de Callan-Symanzik .....                                    | 287 |
| B.5. Application aux phénomènes critiques .....                                         | 289 |
| <b>C. Equations de Callan-Symanzik pour la théorie renormalisée</b> ....                | 290 |
| C.1. Equation de Callan-Symanzik pour $T = T_c$ .....                                   | 291 |
| C.2. Points fixes .....                                                                 | 292 |
| C.3. Equation de Callan-Symanzik pour $T > T_c$ .....                                   | 296 |

|                                                                                               |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>D. Le groupe de renormalisation en dimension <math>D = 4</math></b> .....                  | 302 |
| D.1. Calcul de $\beta(g)$ .....                                                               | 302 |
| D.2. Théorie des perturbations améliorée par le groupe de renormalisation .....               | 304 |
| <b>E. Le groupe de renormalisation en dimension <math>D &lt; 4</math></b> .....               | 305 |
| E.1. Une équation pour $\beta(g, \varepsilon)$ .....                                          | 306 |
| E.2. Calcul de $\beta(g, \varepsilon)$ et $\gamma(g, \varepsilon)$ dans le schéma minimal ... | 307 |
| E.3. Calcul de $\beta$ , $\gamma$ et $\bar{\gamma}$ à l'ordre de deux boucles .....           | 308 |
| E.4. Calcul des exposants critiques à l'ordre $\varepsilon^2$ .....                           | 310 |
| <i>Exercices</i> .....                                                                        | 311 |
| <i>Notes et références</i> .....                                                              | 315 |

### TROISIÈME PARTIE. THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS SCALAIRES

#### CHAPITRE VIII. INTÉGRALES DE CHEMIN EN MÉCANIQUE QUANTIQUE ET MÉCANIQUE STATISTIQUE

|                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>A. Spin quantique et modèle d'Ising</b> .....                                     | 323 |
| A.1. Intégrale de chemin pour un spin 1/2 .....                                      | 323 |
| A.2. Correspondances .....                                                           | 325 |
| <b>B. Particule dans un potentiel</b> .....                                          | 328 |
| B.1. Représentation d'une amplitude de probabilité par une intégrale de chemin ..... | 329 |
| B.2. Fonctionnelle génératrice des produits- $T$ . Expression du produit- $T$ .....  | 333 |
| B.3. Oscillateur harmonique et condition aux limites de Feynman .....                | 336 |
| <b>C. Prolongement euclidien et commentaires</b> .....                               | 340 |
| C.1. Fonction de partition quantique .....                                           | 340 |
| C.2. Analogie classique .....                                                        | 343 |
| C.3. Oscillateur harmonique euclidien .....                                          | 344 |
| <i>Exercices</i> .....                                                               | 345 |
| <i>Notes et références</i> .....                                                     | 349 |

CHAPITRE IX. QUANTIFICATION DU CHAMP  
DE KLEIN-GORDON

|                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>A. Quantification des vibrations élastiques</b> .....                             | 354 |
| A.1. Système à $N$ degrés de liberté : lagrangien, hamiltonien, quantification ..... | 354 |
| A.2. Quantification de la ligne continue .....                                       | 356 |
| A.3. Modes normaux .....                                                             | 358 |
| A.4. Phonons, espace de Fock .....                                                   | 360 |
| <b>B. Quantification du champ de Klein-Gordon</b> .....                              | 363 |
| B.1. Equation d'onde, lagrangien .....                                               | 363 |
| B.2. Décomposition de Fourier .....                                                  | 364 |
| B.3. Quantification canonique .....                                                  | 366 |
| B.4. Commutateur à $t \neq t'$ .....                                                 | 367 |
| B.5. Propagateur .....                                                               | 368 |
| B.6. Singularités sur le cône de lumière .....                                       | 370 |
| <b>C. Couplage à une source classique. Théorème de Wick</b> .....                    | 372 |
| C.1. Opérateur d'évolution. Equation de Dyson .....                                  | 372 |
| C.2. Oscillateur harmonique couplé à une source classique .....                      | 374 |
| C.3. Champ de Klein-Gordon couplé à une source classique .....                       | 377 |
| C.4. Théorème de Wick .....                                                          | 379 |
| <i>Exercices</i> .....                                                               | 382 |
| <i>Notes et références</i> .....                                                     | 385 |

CHAPITRE X. FONCTIONS DE GREEN ET MATRICE  $S$

|                                                                       |     |
|-----------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>A. Développement perturbatif des fonctions de Green</b> .....      | 389 |
| A.1. Représentation interaction et matrice $S$ .....                  | 389 |
| A.2. Formule de Gell-Mann et Low .....                                | 395 |
| A.3. Développement perturbatif .....                                  | 397 |
| A.4. Renormalisation et conditions de normalisation .....             | 400 |
| <b>B. Intégrale de chemin et théorie euclidienne</b> .....            | 401 |
| B.1. Intégrale de chemin pour $Z(j)$ .....                            | 401 |
| B.2. $\Gamma^{(4)}$ au deuxième ordre en $g$ . Rotation de Wick ..... | 403 |
| B.3. Relation avec la théorie euclidienne .....                       | 405 |
| B.4. Equations du mouvement .....                                     | 408 |
| <b>C. Sections efficaces et matrice <math>S</math></b> .....          | 409 |
| C.1. Sections efficaces .....                                         | 410 |

|                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------|-----|
| C.2. Application : 2 particules $\rightarrow$ 2 particules ..... | 413 |
| C.3. Calcul d'un élément de matrice $S$ .....                    | 414 |
| C.4. Formules de réduction .....                                 | 417 |
| C.5. Matrice $S$ et fonctions de Green renormalisées .....       | 420 |
| C.6. Unitarité et renormalisation .....                          | 422 |
| <b>D. Unitarité de la matrice <math>S</math></b> .....           | 423 |
| D.1. Unitarité et relation de dispersion .....                   | 423 |
| D.2. Règles de coupure .....                                     | 428 |
| <b>E. Généralisations</b> .....                                  | 434 |
| E.1. Champ scalaire chargé .....                                 | 434 |
| E.2. Champ vectoriel massif .....                                | 437 |
| E.3. Couplages dérivatifs .....                                  | 440 |
| <i>Exercices</i> .....                                           | 441 |
| <i>Notes et références</i> .....                                 | 443 |

## QUATRIÈME PARTIE. THÉORIES DE JAUGE

### CHAPITRE XI. QUANTIFICATION DU CHAMP DE DIRAC ET DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

|                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>A. Quantification du champ de Dirac</b> .....                                     | 449 |
| A.1. Espace de Fock pour les fermions .....                                          | 449 |
| A.2. Equation de Dirac .....                                                         | 452 |
| A.3. Solutions de l'équation de Dirac .....                                          | 455 |
| A.4. Quantification du champ de Dirac .....                                          | 458 |
| A.5. Propagateur du champ de Dirac .....                                             | 462 |
| <b>B. Théorème de Wick pour les fermions</b> .....                                   | 463 |
| B.1. « Oscillateur fermionique » couplé à une source<br>externe .....                | 463 |
| B.2. Formulation fonctionnelle : intégration sur des variables<br>de Grassmann ..... | 466 |
| <b>C. Formalisme lagrangien pour le champ électromagnétique classique</b><br>.....   | 468 |
| C.1. Equations de Maxwell et potentiel électromagnétique<br>.....                    | 468 |
| C.2. Formulation covariante .....                                                    | 469 |
| C.3. Invariance de jauge et conservation du courant .....                            | 471 |

|                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>D. Quantification du champ électromagnétique</b> .....                      | 473 |
| D.1. Problèmes dans la quantification du champ électromagnétique .....         | 473 |
| D.2. Quantification dans la jauge de Lorentz : fonctionnelle génératrice ..... | 477 |
| <i>Exercices</i> .....                                                         | 481 |
| <i>Notes et références</i> .....                                               | 484 |

## CHAPITRE XII. ÉLECTRODYNAMIQUE QUANTIQUE

|                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>A. Règles de Feynman pour l'électrodynamique quantique</b> ..... | 487 |
| A.1. Fonctions de Green dans l'espace de configuration ..           | 487 |
| A.2. Eléments de matrice $S$ .....                                  | 492 |
| <b>B. Applications</b> .....                                        | 495 |
| B.1. Diffusion d'un électron par un champ coulombien ...            | 495 |
| B.2. Calcul de $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ .....              | 497 |
| B.3. Application : calcul du rapport $R$ .....                      | 499 |
| <b>C. Diagrammes à une boucle en électrodynamique</b> .....         | 501 |
| C.1. Comptage de puissances pour l'électrodynamique .....           | 501 |
| C.2. Propagateur du photon et polarisation du vide .....            | 504 |
| C.3. Propagateur de l'électron .....                                | 511 |
| C.4. Vertex électron-photon .....                                   | 515 |
| C.5. Moment magnétique anormal de l'électron .....                  | 519 |
| <b>D. Identités de Ward, unitarité, renormalisation</b> .....       | 521 |
| D.1. Identités de Ward .....                                        | 521 |
| D.2. Unitarité .....                                                | 527 |
| D.3. Renormalisation .....                                          | 529 |
| D.4. Groupe de renormalisation de l'électrodynamique .....          | 532 |
| <i>Exercices</i> .....                                              | 535 |
| <i>Notes et références</i> .....                                    | 542 |

## CHAPITRE XIII. THÉORIES DE JAUGE NON ABÉLIENNES

|                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>A. Champs de jauge non abéliens : théorie classique</b> ..... | 546 |
| A.1. Le groupe $SU(2)$ .....                                     | 546 |
| A.2. Transport parallèle et dérivation covariante .....          | 551 |
| A.3. Tenseur $F^{\mu\nu}$ et lagrangien .....                    | 556 |

|                                                                                                   |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>B. Quantification des théories de jauge non abéliennes</b> .....                               | 559 |
| B.1. Fonctionnelle génératrice .....                                                              | 559 |
| B.2. Règles de Feynman .....                                                                      | 562 |
| B.3. Renormalisation et identités de Ward .....                                                   | 566 |
| <b>C. Modèle des interactions électro-faibles</b> .....                                           | 568 |
| C.1. Bosons de Goldstone et phénomène de Higgs .....                                              | 569 |
| C.2. Théorie de Fermi des interactions faibles .....                                              | 573 |
| C.3. Modèle de Glashow-Salam-Weinberg .....                                                       | 575 |
| <b>D. Chromodynamique quantique</b> .....                                                         | 583 |
| D.1. Liberté asymptotique .....                                                                   | 584 |
| D.2. Annihilation $e^+ e^-$ : cinématique .....                                                   | 590 |
| D.3. Equation d'Altarelli-Parisi .....                                                            | 592 |
| D.4. Correction d'ordre $\alpha_s$ au rapport $R$ .....                                           | 598 |
| <b>E. Théories de jauge sur réseau</b> .....                                                      | 599 |
| E.1. Modèle de Wegner .....                                                                       | 600 |
| E.2. Action de Wilson et couplage fort .....                                                      | 602 |
| E.3. Couplage faible et invariance d'échelle asymptotique ...                                     | 606 |
| <i>Exercices</i> .....                                                                            | 609 |
| <i>Notes et références</i> .....                                                                  | 616 |
| <b>Appendice A : Transformées de Fourier. Intégration gaussienne</b> ...                          | 619 |
| A.1. Transformées de Fourier .....                                                                | 619 |
| A.2. Intégrales gaussiennes .....                                                                 | 621 |
| A.3. Intégrales en dimension $D$ .....                                                            | 623 |
| <b>Appendice B : Intégrales de Feynman en régularisation dimensionnelle (cas euclidien)</b> ..... | 625 |
| <b>Appendice C : Formulaire</b> .....                                                             | 627 |
| C.1. Groupe de Lorentz .....                                                                      | 627 |
| C.2. Matrices de Dirac .....                                                                      | 628 |
| C.3. Sections efficaces .....                                                                     | 630 |
| C.4. Règles de Feynman .....                                                                      | 631 |
| <i>Index</i> .....                                                                                | 635 |

# Avant-propos

En 1965, J. Bjorken et S. Drell concluait leur ouvrage classique (\*), qui fut la bible d'une génération de physiciens des particules, par ces considérations pessimistes : « Par conséquent toutes les conclusions reposant sur le groupe de renormalisation... sont hasardeuses et doivent être prises avec la plus grande prudence. Ainsi en est-il de tous les résultats des théories des champs relativistes. » La même année, F. Dyson, l'un des pères fondateurs de l'électrodynamique quantique, écrivait (\*\*): « On imagine aisément que d'ici quelques années les concepts de la théorie des champs auront totalement disparu du vocabulaire quotidien des physiciens des hautes énergies. » On sait que le développement de la physique n'a pas confirmé ces prévisions : la physique moderne des particules élémentaires est devenue indissociable des théories de jauge non abéliennes, généralisation de l'électrodynamique quantique élaborée au lendemain de la Deuxième Guerre mondiale par Schwinger, Feynman, Dyson et Tomonaga.

Après tout, la théorie quantique des champs avait été inventée pour décrire la création et l'annihilation de particules, et son retour en force dans ce domaine, après une période de disgrâce d'une dizaine d'années, n'était pas une surprise totale. Plus étonnant fut l'impact de la théorie des champs sur la compréhension des phénomènes critiques, au début des années soixante-dix. Certes les méthodes de la théorie des champs (fonctions de Green, diagrammes de Feynman...) avaient déjà été empruntées par les physiciens du solide et les physiciens nucléaires, dans le cadre du « problème à  $N$ -corps », mais il s'agissait avant tout d'outils de travail, qui n'introduisaient pas d'idées fondamentalement nouvelles (sauf en supraconductivité et superfluidité, mais c'étaient là les prémisses d'une approche très générale et très féconde, celle des symétries brisées). Au contraire l'irruption du concept de renormalisation en physique statistique était révolutionnaire, car rien ne laissait prévoir que l'élimination des infinis, qui furent la plaie initiale de la théorie des champs, pouvait jouer un rôle dans un domaine où ils étaient a priori absents. Le mérite de Wilson fut de réaliser que les

(\*) Bjorken-Drell, chapitre 19.

(\*\*) *Physics Today* (juin 1965).



fonctions de corrélation d'un système au voisinage d'un point critique étaient, à longue distance, décrites par une théorie renormalisée. Cette observation fondamentale devait d'ailleurs donner un éclairage nouveau sur la renormalisation.

Il m'a semblé utile d'écrire un ouvrage d'introduction, qui mette les développements de ces vingt dernières années à la portée d'étudiants de troisième cycle, ainsi que de physiciens non spécialistes qui souhaitent s'initier aux méthodes de la théorie des champs. J'ai suivi un plan d'ensemble assez différent des exposés traditionnels, qui sont, en règle générale, orientés uniquement soit vers la physique statistique, soit vers la physique des hautes énergies. La démarche choisie permet d'arriver rapidement au cœur de la théorie des champs, à savoir la renormalisation et le groupe de renormalisation, dans le cadre du modèle le plus simple possible : le modèle en  $\varphi^4$ , ou modèle de Ginzburg-Landau, tout en conduisant à des applications fondamentales à la physique des phénomènes critiques.

Le livre est divisé en quatre parties. La première est une introduction aux phénomènes critiques et au groupe de renormalisation, dans la version de Wilson. Des applications comme le « développement  $\varepsilon$  » et le modèle  $XY$  sont traitées en détail. La deuxième partie traite du développement perturbatif, toujours dans le cadre de la physique statistique. Le chapitre V introduit les techniques de base (fonctionnelles génératrices, diagrammes de Feynman). C'est un chapitre un peu technique et quelque peu fastidieux, mais nécessaire pour l'étude des deux chapitres suivants qui abordent les concepts fondamentaux de la théorie : renormalisation et groupe de renormalisation, cette fois dans la version des équations de Callan-Symanzik.

Avec la troisième partie, on quitte l'espace euclidien de la physique statistique pour l'espace de Minkowski de la théorie quantique relativiste. L'essentiel du formalisme est déjà en place, car les fonctions de Green de la théorie quantique ne sont qu'un prolongement analytique des fonctions de corrélation de la théorie euclidienne. Ceci est expliqué au chapitre VIII, dans le cas de la mécanique quantique ordinaire. Alors que les intégrales fonctionnelles avaient été jusqu'à ce point utilisées de façon systématique, le chapitre IX ouvre une brève parenthèse pour exposer la quantification canonique, tandis que dans le chapitre suivant est rassemblé l'essentiel des résultats indispensables pour les applications à la physique des particules... s'il n'existait que des particules de spin zéro ! Enfin la quatrième partie introduit les théories de jauge : on y décrit la quantification du champ de Dirac et du champ électromagnétique (chapitre XI). L'électrodynamique quantique est étudiée de façon assez détaillée au chapitre XII, tandis que le chapitre XIII contient une introduction aux champs de jauge non abéliens. Le livre se conclut par un bref aperçu des théories de jauge sur réseau,

ce qui permet de faire une synthèse de l'essentiel des concepts introduits dans l'ensemble de l'exposé. Le lecteur intéressé uniquement par l'aspect « théorie quantique des champs » pourra commencer au chapitre V et sauter dans le chapitre VII le paragraphe A et les passages plus spécifiquement consacrés aux phénomènes critiques.

Comme j'ai voulu écrire un livre d'introduction, et non de référence, j'ai été amené dans certains cas à renoncer à des démonstrations générales trop complexes pour les remplacer par des exemples illustratifs. J'ai également choisi d'exposer la plupart des calculs de façon très détaillée ; j'espère que cela ne masquera pas la physique sous-jacente. Enfin un certain nombre de sujets importants ont été omis, afin de garder une dimension raisonnable à ce livre ; c'est le cas par exemple de la solution exacte du modèle d'Ising à deux dimensions, des lois d'échelle pour l'équation d'état, des invariances (Lorentz, symétries discrètes), des développements en produits d'opérateurs, des anomalies, de l'approche géométrique aux théories de jauge, etc. Le lecteur trouvera ces sujets exposés de façon excellente dans les livres ou articles cités en référence. De façon générale, j'ai plutôt insisté sur les *méthodes*, et donné assez peu de détails sur les *systèmes* physiques utilisés pour illustrer ces méthodes.

Quelques notions de mécanique statistique suffisent pour aborder la première partie. En dehors de certains passages où le volume des calculs devient assez important, l'essentiel des trois premiers chapitres peut d'ailleurs être enseigné en fin de maîtrise, comme complément à un cours de mécanique statistique. La seconde partie ne fait appel à aucune notion avancée ; cependant les calculs sont parfois un peu longs. Enfin des connaissances de mécanique quantique, au niveau d'un cours de maîtrise, sont indispensables pour les deux dernières parties. Quelques notions élémentaires sur les fonctions de variables complexes, sur la théorie des groupes et sur la physique des particules élémentaires faciliteront également la compréhension de ces deux parties.

L'exposé est accompagné de 120 exercices de difficulté très variée. Certains sont de simples applications du cours, d'autres peuvent être de petits problèmes ouvrant la voie à des développements nouveaux. J'ai essayé (sans toujours y parvenir), d'éviter le style « Démontrer l'équation (36) » en donnant des énoncés détaillés, des indications de solutions ou des réponses partielles ; dans certains cas le renvoi à une référence permettra au lecteur de vérifier ou de compléter sa solution.

Un certain nombre de livres et d'articles de revue ont été rassemblés dans les références générales. Ce sont ceux qui m'ont été les plus utiles dans la préparation de cet ouvrage, et aussi ceux qui, à mon avis, seront les plus facilement accessibles au lecteur. Il était évidemment hors de question de donner une bibliographie complète et, selon la formule

consacrée, j'adresse mes excuses anticipées à ceux de mes collègues dont le travail n'a pas été convenablement cité.

Ce livre est issu de cours de troisième cycle, enseignés sous des formes diverses dans le DEA de Physique Théorique (Marseille-Nice), dans le DEA de Physique de la Matière Condensée (Nice) et dans le Magistère de Constantine. Je suis très reconnaissant aux étudiants dont les remarques ont été précieuses dans la mise au point de ce livre. Victor Alessandrini a lu l'intégralité du manuscrit et m'a fait bénéficier de remarques très pertinentes, en particulier sur l'organisation générale de l'ouvrage. J'ai également bénéficié des critiques et suggestions de E. Brezin, J. P. Provost, J. L. Meunier et F. Guérin. P. de Giovanni m'a fait part de remarques très utiles sur le texte et les exercices. Je suis très reconnaissant à Michèle Leduc, qui a beaucoup fait pour que ce livre paraisse. J'ai mis à rude épreuve la patience de Chantal Djankoff, qui a dactylographié de multiples versions du manuscrit avec sa compétence et son efficacité habituelles, et je l'en remercie très vivement. Enfin, Joanna a partagé avec moi doutes et incertitudes pendant la rédaction ; sans son soutien de tous les jours, ce livre n'aurait pas pu être écrit.

Nice, décembre 1986

## Références générales

- E. ABERS et B. LEE : « Gauge Theories », *Physics Reports*, **9**, 141 (1973).
- D. AMIT : *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena*, World Scientific (1984) (2<sup>e</sup> édition).
- J. BJORKEN et S. DRELL : Vol. I. *Relativistic Quantum Mechanics* et Vol. II. *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill (1965).
- N. BOGOLIUBOV et D. CHIRKOV : *Introduction à la théorie quantique des champs*, Dunod (1960).
- E. BREZIN, J. C. LE GUILLOU et J. ZINN-JUSTIN : « Field Theoretical Approach to Critical Phenomena » in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol. VI, Academic Press (1976).
- J. C. COLLINS : *Renormalization*, Cambridge University Press (1983).
- S. GASIOROWICZ : *Elementary Particle Physics*, Wiley (1966).
- G. 'HOOFT et M. VELTMAN : « Diagrammar » in *Particle Interactions at Very High Energies*, Plenum Press, New York (1974).
- C. KITTEL : *Introduction à la physique de l'état solide*, Dunod (1970).
- C. ITZYKSON et J. B. ZUBER : *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill (1980).
- J. KOGUT : « An Introduction to Lattice Gauge Theory and Spin Systems », *Reviews of Modern Physics*, **51**, 659 (1979).
- L. LANDAU et E. LIFSCHITZ : *Physique statistique*, Editions MIR (1967).
- S. K. MA : *Modern Theory of Critical Phenomena*, Benjamin (1976).
- A. MESSIAH : *Mécanique quantique*, Dunod (1961).
- V. POPOV : *Functional Integration in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics*, Reidel (1983).
- P. RAMOND : *Field Theory : a Modern Primer*, Benjamin (1980).
- S. SHENKER : « Field Theories and Phase Transitions » in *Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics*, Ecole des Houches (1982).
- R. STREATER et A. WIGHTMAN : *PCT, Spin, Statistics and All That*, Benjamin (1964).
- G. TOULOUSE et P. PFEUTY : *Introduction au groupe de renormalisation et à ses applications*, Presses Universitaires de Grenoble (1975).
- K. WILSON : « The Renormalization Group : Critical Phenomena and the Koudo Problem », *Reviews of Modern Physics*, **47**, 774 (1975).

Landau (approximation de) : 62, 67.  
 Landau (théorie de) : 71.  
 Largeur de la région critique : 106, 107.  
 Legendre (transformation de) : 49, 206.  
 Liberté asymptotique : 295, 584.  
 Lie (groupe de) : 546.  
 Lie (algèbre de) : 548.  
 Ligne physique : 97.  
 Localité : 368, 390.  
 Logarithmes dominants : 279, 304.  
 Longueur de corrélation : 33, 47, 246, 327, 599.

## M

Marginal (champ, opérateur ou variable) : 103, 132.  
 Masse nue : 236, 240.  
 Masse renormalisée : 242.  
 Matrice  $S$  : 376, 389, 393, 409, 414, 419.  
 Matrice  $T$  : 410.  
 Matrice de transfert : 328.  
 Méson : 584.  
 Métastabilité : 72.  
 Minimal ( $MS$  ; schéma de soustraction) : 261, 307, 508, 587.  
 Modèle :  
 — gaussien : 79, 118,  
 — de Heisenberg : 29, 167,  
 — d'Ising : 28, 325,  
 —  $\sigma$ -non linéaire : 167,  
 — de Villain : 159,  
 — de Wegner : 600,  
 —  $XY$  : 153.  
 Modes normaux : 121, 352, 358.  
 Moment : 21, 178, 367.  
 Moment conjugué : 355, 358.  
 Moment magnétique anormal : 485, 520.  
 Muon : 497.

## N

Nœther (théorème de) : 471.  
 Nombre d'occupation : 361, 450.  
 Normalisation (conditions de) : 245, 254, 260, 400.

## O

Opérateur composé : 236, 255.  
 Opérateur d'évolution : 323, 372.  
 Onde de spin : 158, 162.

## P

Paquet d'ondes : 365.  
 Paramètre d'ordre : 27.  
 Pauli (matrices de) : 547, 628.  
 Perturbatif (développement) : 121, 184, 397.  
 Phonon : 361.  
 Plaquette : 93, 600.  
 Point fixe : 98, 287, 292.  
 — gaussien : 125,  
 — infrarouge stable : 293,  
 — non gaussien : 126,  
 — ultraviolet stable : 294.  
 Poisson (formule de sommation de) : 161.  
 Polarisation : 439, 473.  
 Polarisation du vide : 510, 532.  
 Potentiel effectif : 212.  
 Potentiel thermodynamique (ou de Gibbs) : 49.  
 Produit normal : 362.  
 Produit- $T$  : 327, 333, 370, 462.  
 Propagateur : 189, 370, 462, 479, 488, 489.

## Q

Quantification :  
 — d'un champ classique : 352,  
 — du champ de Dirac : 458,  
 — du champ électromagnétique : 473,  
 — du champ de Klein-Gordon : 366,  
 — des théories de jauge non abéliennes : 559,  
 — des vibrations élastiques : 359.  
 Quark : 448, 499, 583.

## R

Réduction (formules de) : 417.  
 Relations de dispersion : 426.

- Régularisation : 239,  
 — dimensionnelle : 215, 240, 403, 504, 585,  
 — de Schwinger : 218, 239,  
 — sur réseau : 240, 603.
- Renormalisables, non renormalisables, super-renormalisables (théories) : 238.
- Renormalisation :  
 — du champ : 243,  
 — (constante de) : 244,  
 — de la constante de couplage : 242,  
 — sur couche de masse : 400,  
 — de l'électrodynamique : 529,  
 — (équations différentielles de) : 126,  
 — (groupe de) cf. groupe,  
 — de la masse : 241,  
 — des opérateurs composés : 258,  
 — des théories de jauge non abéliennes : 566.
- Représentation :  
 — adjointe : 550,  
 — fondamentale : 548, 550,  
 — d'un groupe : 548.
- Représentation interaction : 373, 392.
- S**
- Saveur : 583.
- Schwinger (régularisation de) : 218, 239.
- Section efficace : 412, 630.
- Singularité infrarouge : 594.
- Singularité de masse (ou colinéaire) : 594.
- Source (du champ) : 181, 334, 363, 377, 467, 488.
- Soustraction (point de) : 254, 400.
- Spin-statistique (théorème) : 461.
- Structure (constante de) : 550.
- Structure (fonctions de) : 592.
- Stuëckelberg (lagrangien de) : 479.
- Susceptibilité magnétique : 39.
- Surface critique : 97.
- Symétrie brisée : cf. brisure de symétrie.
- Symétrie  $O(n)$  : 184.
- T**
- Tadpole : 214, 398.
- Taux de désintégration : 412, 630.
- Tension de la corde : 605.
- Transformation du groupe de renormalisation (TGR) : 90, 92, 117.
- Transmutation dimensionnelle : 589.
- Transport parallèle : 552, 555.
- Tricritique (point) : 103.
- U**
- Ultraviolette (divergence) : 215, 223.
- Unitarité : 377, 390, 423, 527.
- Universalité : 52, 107.
- V**
- Valeur moyenne sur le vide : 569.
- Variable essentielle, marginale, inessentielle : cf. champ —.
- Vertex : 186, 189, 399, 489.
- Vertex propre : 205, 399.
- Vide : 333, 361, 388, 569.
- Villain (modèle de) : 159.
- Vortex : 157.
- W**
- Ward (identité de) : 523, 566, 610.
- Wegner (modèle de) : 600.
- Weinberg (angle de) : 577, 580.
- Weinberg (théorème de) : 229.
- Wick (rotation de) : 405.
- Wick (théorème de) : 180, 379, 465.
- Wilson (action de) : 604.
- Wilson (boucle de) : 602, 604.
- XYZ**
- $XY$  (modèle) : 153.